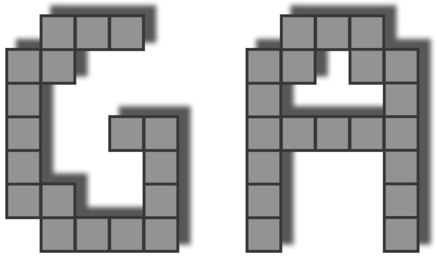
# Réflexions et Rotations Digitales Bijectives avec l'Algèbre Géométrique

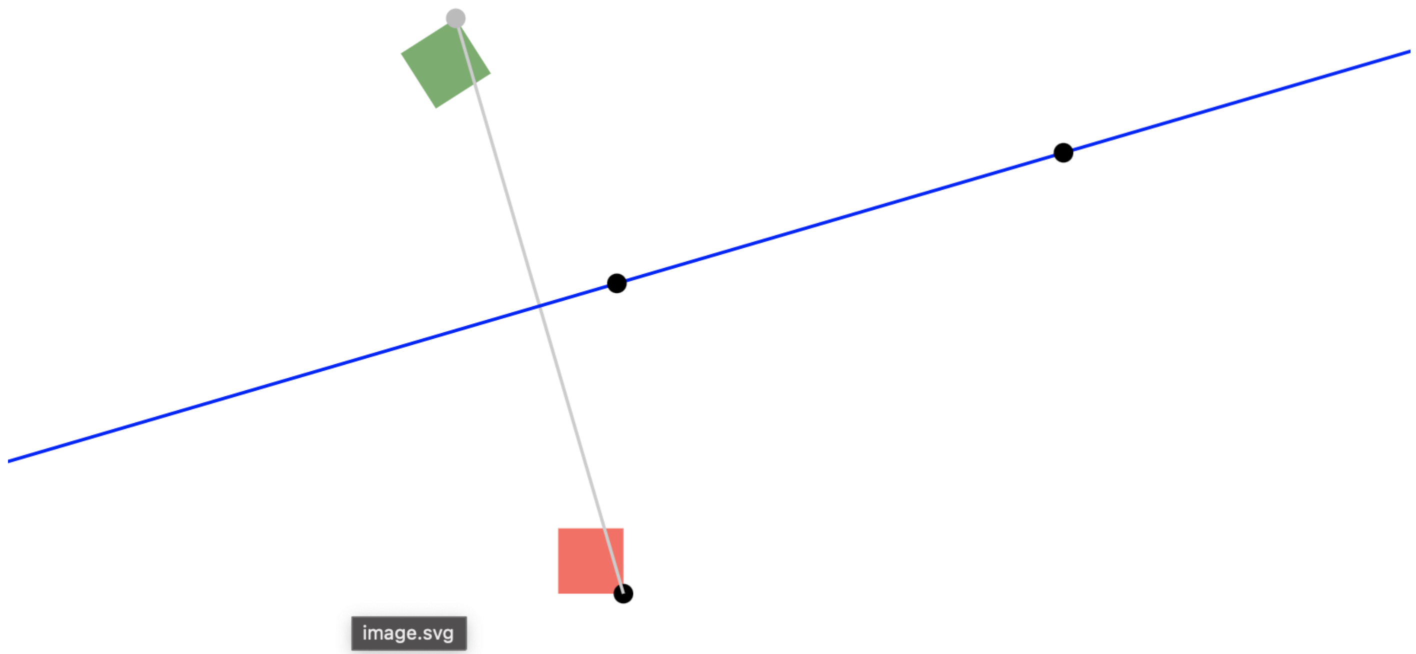
*Stéphane Breuils, Yukiko Kenmochi, Akihiro Sugimoto*



# Pourquoi l'algèbre géométrique?

## Réflexions

$$\mathbf{y} = -\mathbf{m}\mathbf{x}\mathbf{m}^{-1}$$

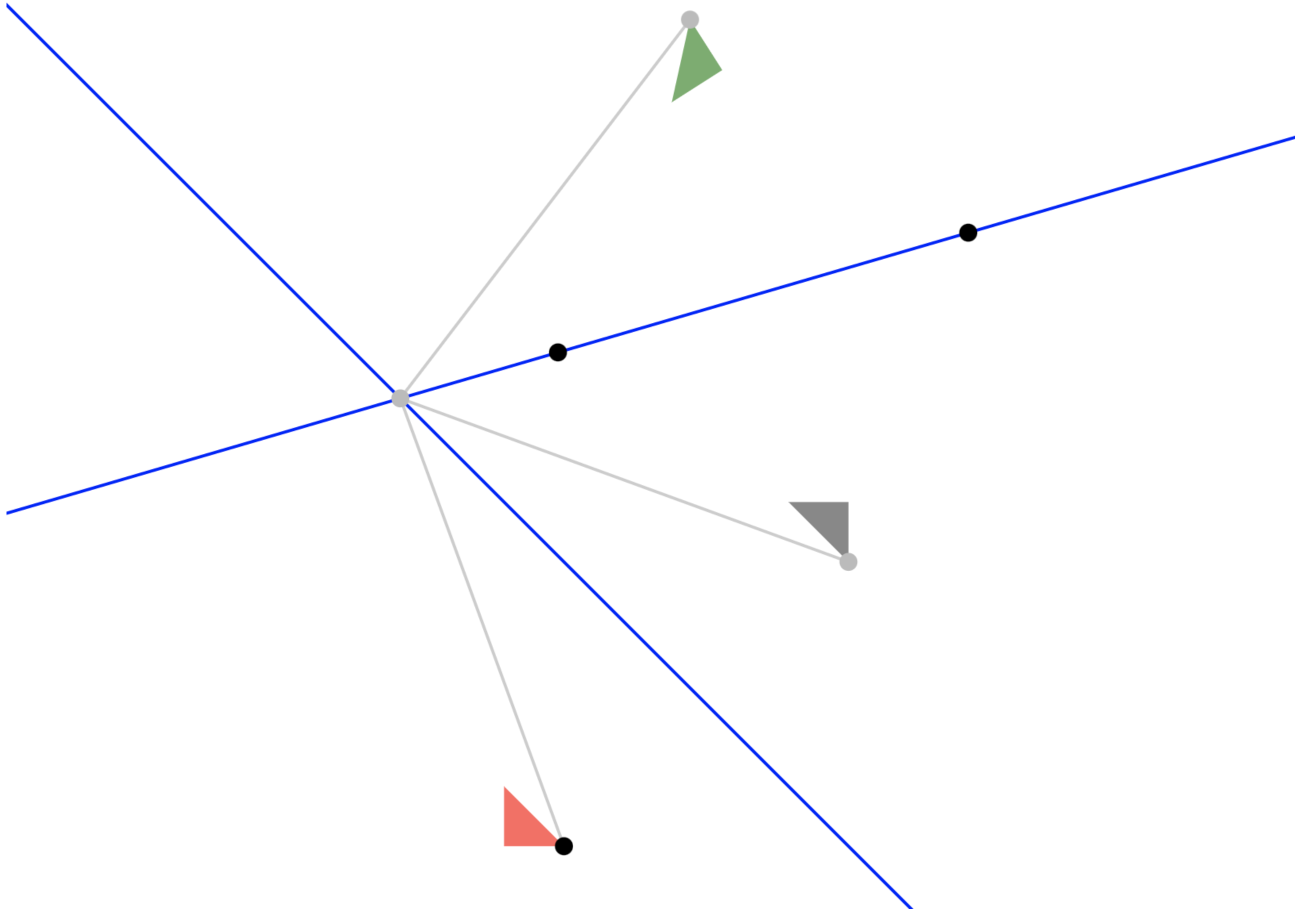


# Pourquoi l'algèbre géométrique?

## Réflexions vers rotations

$$\mathbf{y} = \mathbf{Q}\mathbf{x}\mathbf{Q}^{-1}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{mn}$$



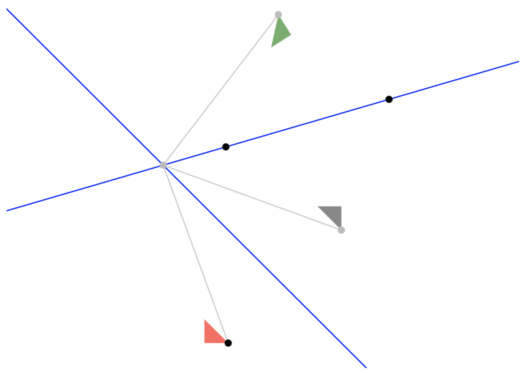
# Pourquoi l'algèbre géométrique?

## Réflexions, rotations

Produit de $\mathbf{mn}$, rotation de $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{Q} = \mathbf{mn} = \underset{\displaystyle\downarrow}{\cos\frac{\theta}{2}} + \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{e}_{12}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{QxQ}^{-1}$$



- définies quelque soit la dimension
- génériques et faciles à manipuler

# Méthode proposée

## Nouvelles rotations digitales bijectives à partir de réflexions

$\hookrightarrow$ trouver les réflexions digitales bijectives

$\hookrightarrow$ réflexions digitales bijectives $\rightarrow$ rotations digitales bijectives

$\hookrightarrow$ quelques résultats expérimentaux

# Opérateurs

## Réflexions digitales

- Réflexions $\mathcal{U}^m$

$$\left|\begin{array}{rccc} \mathcal{U}^{\mathbf{m}}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \mathbf{x} & \mapsto & -\mathbf{m}\mathbf{x}\mathbf{m}^{-1} = -\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^2}\mathbf{m}\mathbf{x}\mathbf{m}. \end{array}\right.$$

# Opérateurs

## Réflexions digitales

- Réflexions $\mathcal{U}^m$

$$\left| \begin{array}{rccc} \mathcal{U}^{\mathbf{m}} : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \mathbf{x} & \mapsto & -\mathbf{m}\mathbf{x}\mathbf{m}^{-1} = -\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^2}\mathbf{m}\mathbf{x}\mathbf{m}. \end{array} \right.$$

- Opérateur digital $\mathcal{D}$

$$\left| \begin{array}{rccc} \mathcal{D} : & \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{Z}^2 \\ & u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 & \mapsto & \lfloor u_1 + \frac{1}{2} \rfloor \mathbf{e}_1 + \lfloor u_2 + \frac{1}{2} \rfloor \mathbf{e}_2 \end{array} \right.$$

# Opérateurs

## Réflexions digitales

- Réflexions $\mathcal{U}^m$

$$\left|\begin{array}{cccc} \mathcal{U}^{\mathbf{m}}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & \mathbf{x} & \mapsto & -\mathbf{m}\mathbf{x}\mathbf{m}^{-1} = -\frac{1}{\|\mathbf{m}\|^2}\mathbf{m}\mathbf{x}\mathbf{m}. \end{array}\right.$$

- Opérateur digital $\mathcal{D}$

$$\left|\begin{array}{cccc} \mathcal{D}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{Z}^2 \\ & u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 & \mapsto & \lfloor u_1 + \frac{1}{2}\rfloor\mathbf{e}_1 + \lfloor u_2 + \frac{1}{2}\rfloor\mathbf{e}_2 \end{array}\right.$$

- Réflexions digitales $\mathcal{R}^{\mathbf{m}}$

$$\left|\begin{array}{cccc} \mathcal{R}^{\mathbf{m}}: & \mathbb{Z}^2 & \to & \mathbb{Z}^2 \\ & \mathbf{x} & \mapsto & \mathcal{D}\circ\mathcal{U}^{\mathbf{m}}(\mathbf{x}) \end{array}\right.$$

# Trouver les reflexions digitales bijectives

- Idée: s'appuyer sur la condition de bijectivité des rotations digitales (Jacob, Andres, Nouvel, Rémila, Roussillon, Coeurjolly ...)

$$\{\cos(\theta), \sin(\theta)\} = \left\{ \frac{2k+1}{2k^2+2k+1}, \frac{2k(k+1)}{2k^2+2k+1} \right\}, \boldsymbol{k} \in \mathbb{N}$$

# Trouver les reflexions digitales bijectives

- Idée: s'appuyer sur la condition de bijectivité des rotations digitales (Jacob, Andres, Nouvel, Rémila, Roussillon, Coeurjolly ...)

$$\{\cos(\theta), \sin(\theta)\} = \left\{ \frac{2k+1}{2k^2+2k+1}, \frac{2k(k+1)}{2k^2+2k+1} \right\}, k \in \mathbb{N}$$

- Algèbre géométrique, rotation d'angle $\theta$ d' un objet $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Q}\mathbf{x}\mathbf{Q}^{-1}$$

$$\mathbf{Q} = \cos\frac{\theta}{2} + \sin\frac{\theta}{2}\mathbf{e}_{12}$$

# Trouver les reflexions digitales bijectives

- Idée: s'appuyer sur la condition de bijectivité des rotations digitales (Jacob, Andres, Nouvel, Rémila, Roussillon, Coeurjolly ...)

$$\{\cos(\theta), \sin(\theta)\} = \left\{ \tfrac{2k+1}{2k^2+2k+1}, \tfrac{2k(k+1)}{2k^2+2k+1} \right\}, k \in \mathbb{N}$$

- Algèbre géométrique, rotation d'angle $\theta$ d' un objet $\mathbf{x}$:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Q}\mathbf{x}\mathbf{Q}^{-1}$$

$$\mathbf{Q} = \cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\tfrac{\theta}{2}\mathbf{e}_{12}$$

$$\downarrow$$

$$\mathbf{Q} = (k+1) + k\mathbf{e}_{12}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

# Trouver les réflexions digitales bijectives

- Idée

  $\mathbf{m}_b$ : réflexions digitales bijectives

  $\Leftrightarrow -\mathbf{e}_1\mathbf{m}_b\mathbf{e}_1^{-1}$ est aussi une reflexion digitale bijective

  $\Leftrightarrow -\mathbf{e}_1(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1^{-1}$ est aussi une reflexion digitale bijective

# Trouver les réflexions digitales bijectives

- Idée

$\mathbf{m}_b$ : réflexions digitales bijectives

$\Leftrightarrow -\mathbf{e}_1\mathbf{m}_b\mathbf{e}_1^{-1}$ est aussi une reflexion digitale bijective

$\Leftrightarrow -\mathbf{e}_1(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1^{-1}$ est aussi une reflexion digitale bijective

- Insérer dans la definition des reflexions digitales

$\Leftrightarrow \mathbf{e}_1\mathbf{m}_b\mathbf{e}_1^{-1}\mathbf{x}\mathbf{e}_1\mathbf{m}_b^{-1}\mathbf{e}_1^{-1}$

$\Leftrightarrow (\mathbf{e}_1\mathbf{m}_b)(\mathbf{e}_1^{-1}\mathbf{x}\mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_1\mathbf{m}_b)^{-1}$

# Trouver les réflexions digitales bijectives

- Idée

$\mathbf{m}_b$ : réflexions digitales bijectives

$\Leftrightarrow -\mathbf{e}_1\mathbf{m}_b\mathbf{e}_1^{-1}$ est aussi une reflexion digitale bijective

$\Leftrightarrow -\mathbf{e}_1(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1^{-1}$ est aussi une reflexion digitale bijective

- Insérer dans la definition des reflexions digitales

$\Leftrightarrow \mathbf{e}_1\mathbf{m}_b\mathbf{e}_1^{-1}\mathbf{x}\mathbf{e}_1\mathbf{m}_b^{-1}\mathbf{e}_1^{-1}$

$\Leftrightarrow (\mathbf{e}_1\mathbf{m}_b)(\mathbf{e}_1^{-1}\mathbf{x}\mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_1\mathbf{m}_b)^{-1}$

reflexion de $\mathbf{x}$ par rapport a l'axe $\mathbf{e}_2$

# Réflexions digitales bijectives

$$\Leftrightarrow (\mathbf{e}_1\mathbf{m}_b)(\mathbf{e}_1^{-1}\mathbf{x}\mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_1\mathbf{m}_b)^{-1}$$

- **$\mathbf{e}_1\mathbf{m}_b$?**

$$\mathbf{e}_1(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2) = a \; + b\mathbf{e}_{12}$$

$\rightarrow$homogène à l'entité effectuant la rotation en algèbre géométrique

# Réflexions digitales bijectives

$$\Leftrightarrow (\mathbf{e}_1\mathbf{m}_b)(\mathbf{e}_1^{-1}\mathbf{x}\mathbf{e}_1)(\mathbf{e}_1\mathbf{m}_b)^{-1}$$

- $\mathbf{e}_1\mathbf{m}_b$ **?**

$$\mathbf{e}_1(a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2) = a \ + b\mathbf{e}_{12}$$

$\rightarrow$homogène à l'entité effectuant la rotation en algèbre géométrique

- $a, b$ **?**

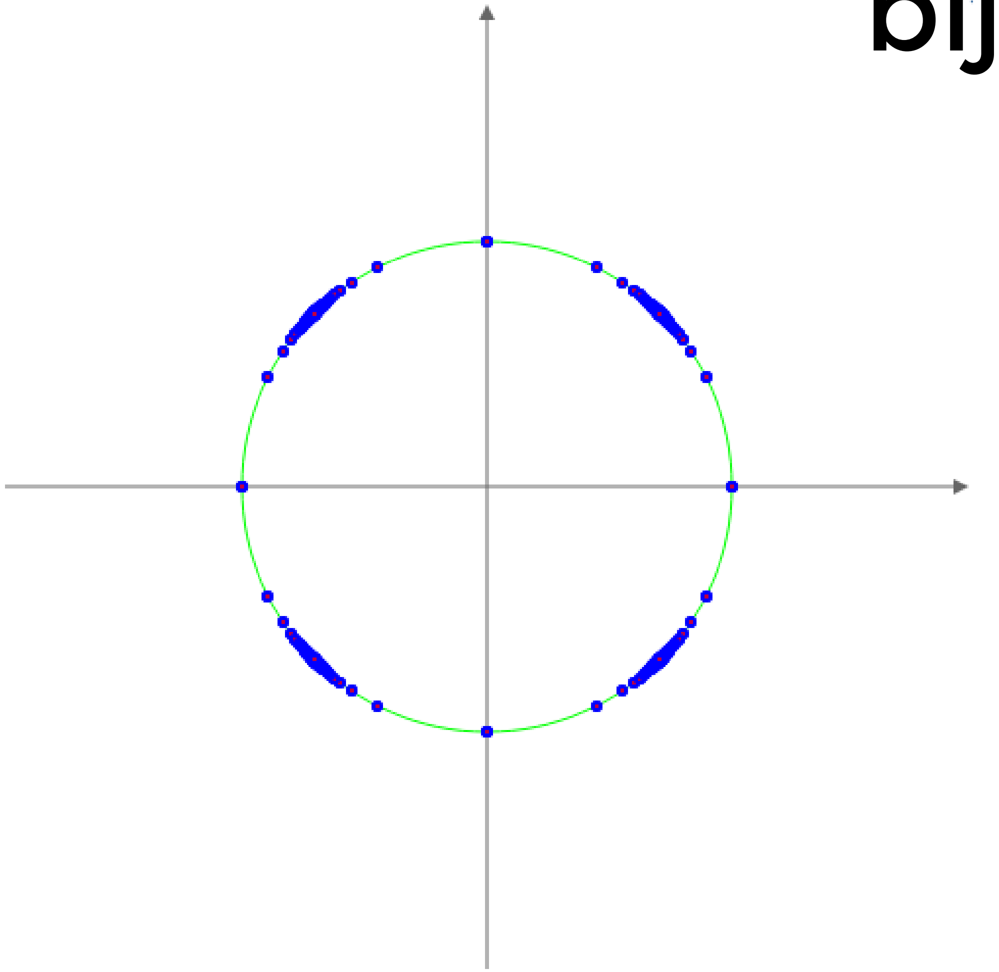
$$\mathbf{Q} = \cos\tfrac{\theta}{2} + \sin\tfrac{\theta}{2}\mathbf{e}_{12} = (k+1) + k\mathbf{e}_{12}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\mathbf{m}_b = (k+1)\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2, k \in \mathbb{N}}$$

# Distribution angulaire des réflexions digitales bijectives

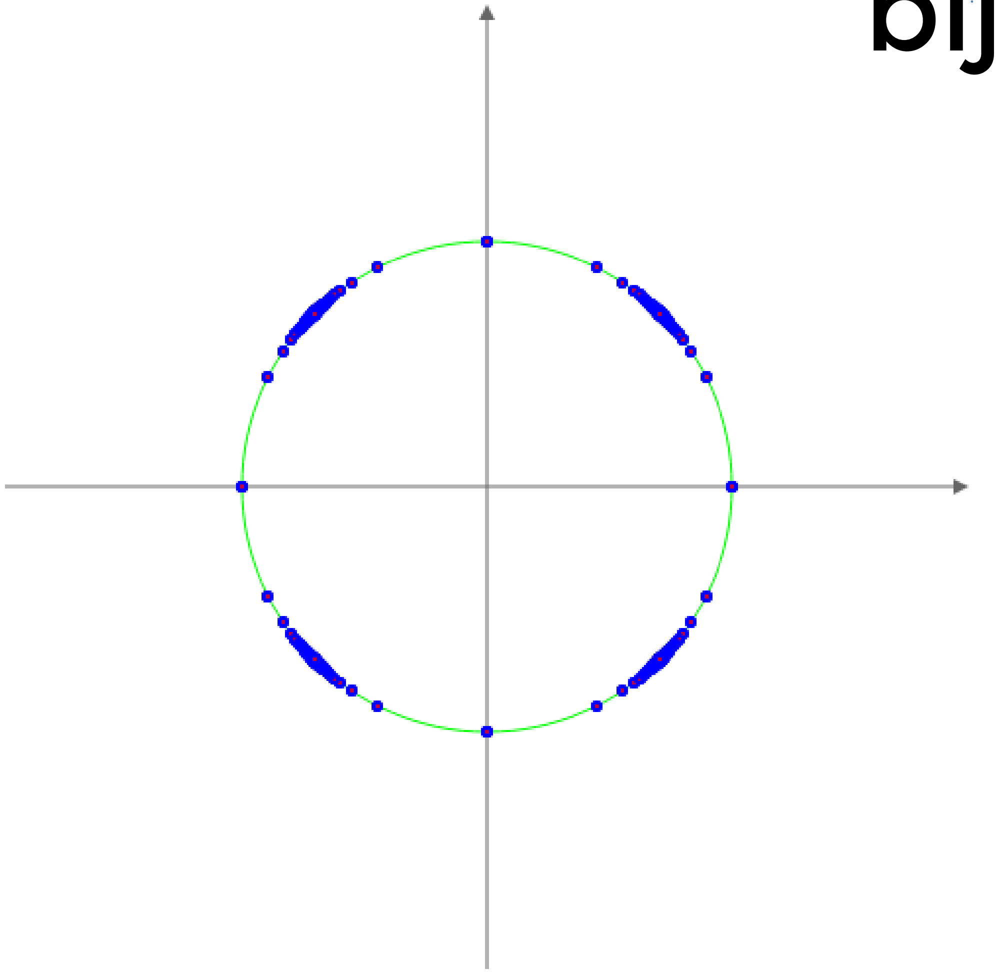
# Distribution des réflexions digitales bijectives



réflexions digitales bijective

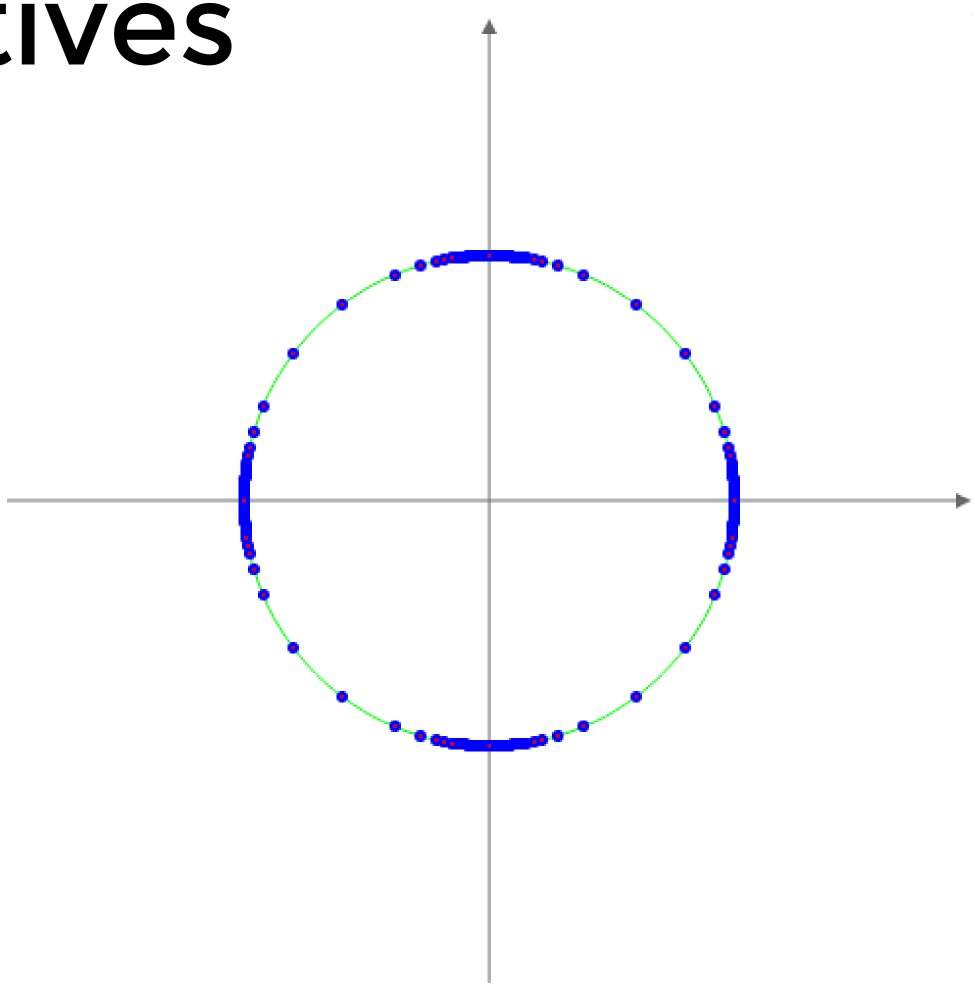
$\mathbf{m} = -(k+1)\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2, k \in \mathbb{N}$

# Distribution des réflexions digitales bijectives



réflexions digitales bijective

$\mathbf{m} = -(k+1)\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2, k \in \mathbb{N}$



rotations digitales bijectives

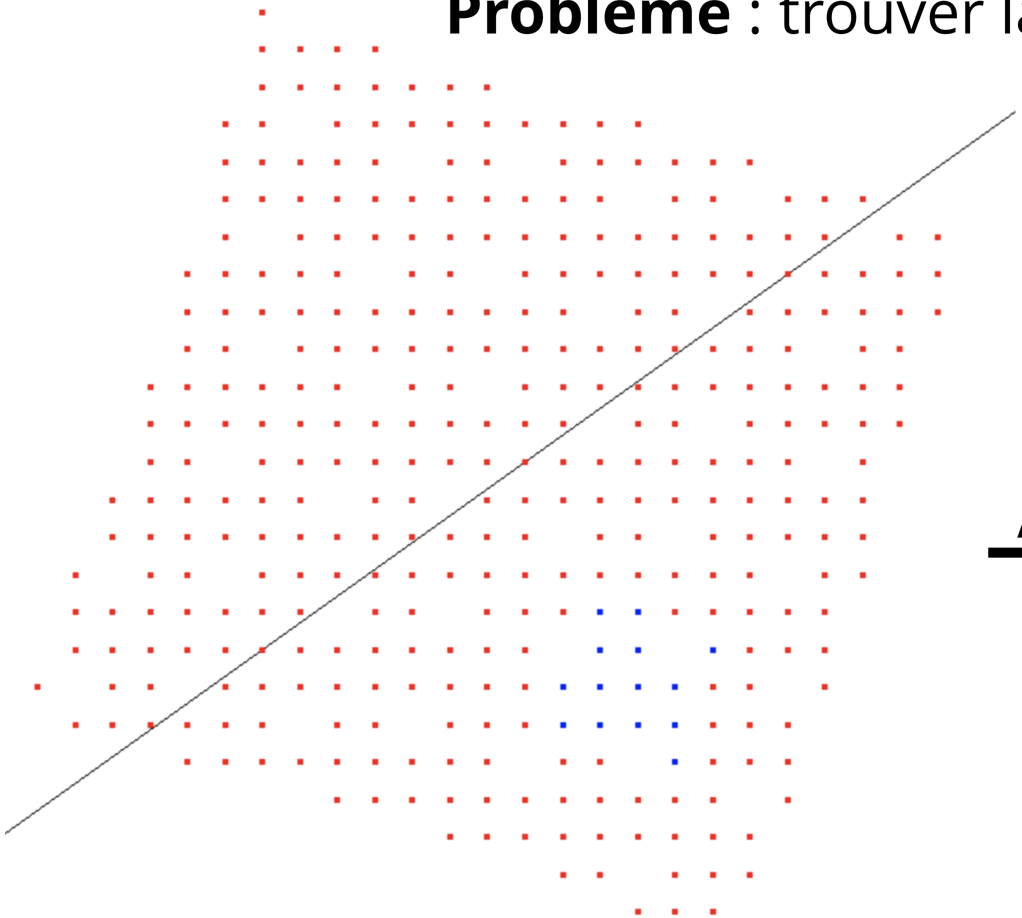
$\{\cos(\theta), \sin(\theta)\} = \left\{ \frac{2k+1}{2k^2+2k+1}, \frac{2k(k+1)}{2k^2+2k+1} \right\}$

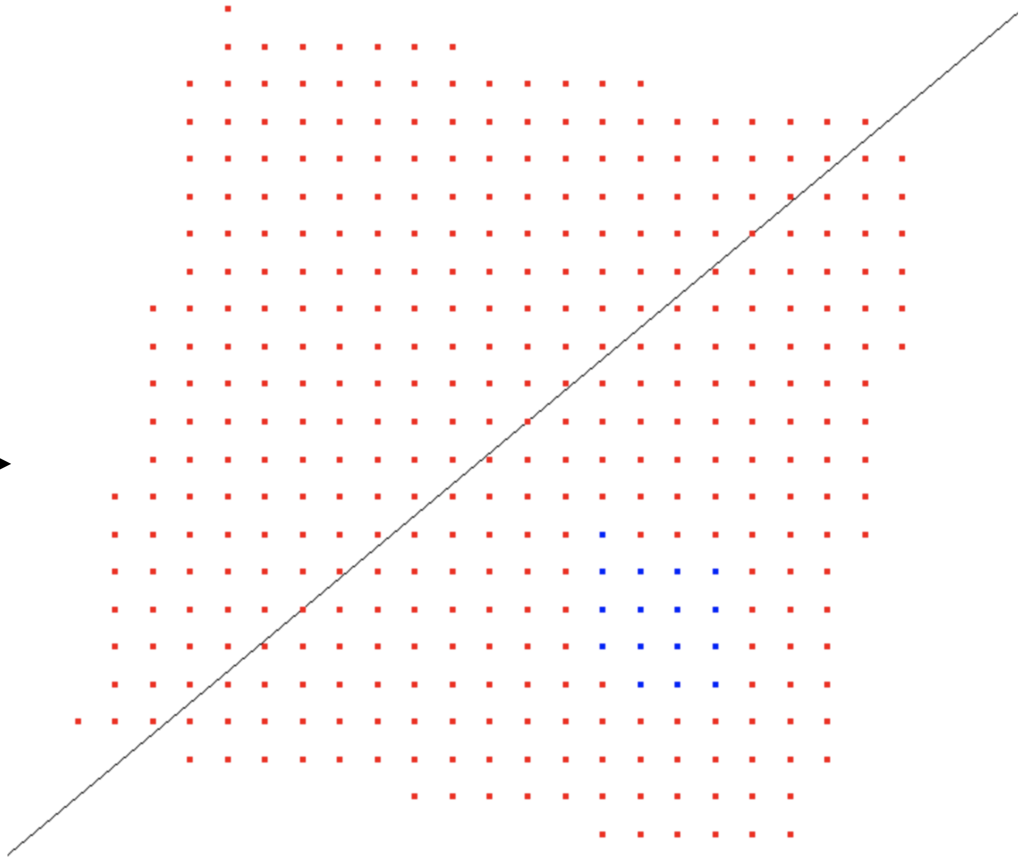
# Approximation de rotations à partir de réflexions digitales bijectives

# Approximations pour les réflexions

**Entrée** : réflexion non nécessairement bijective

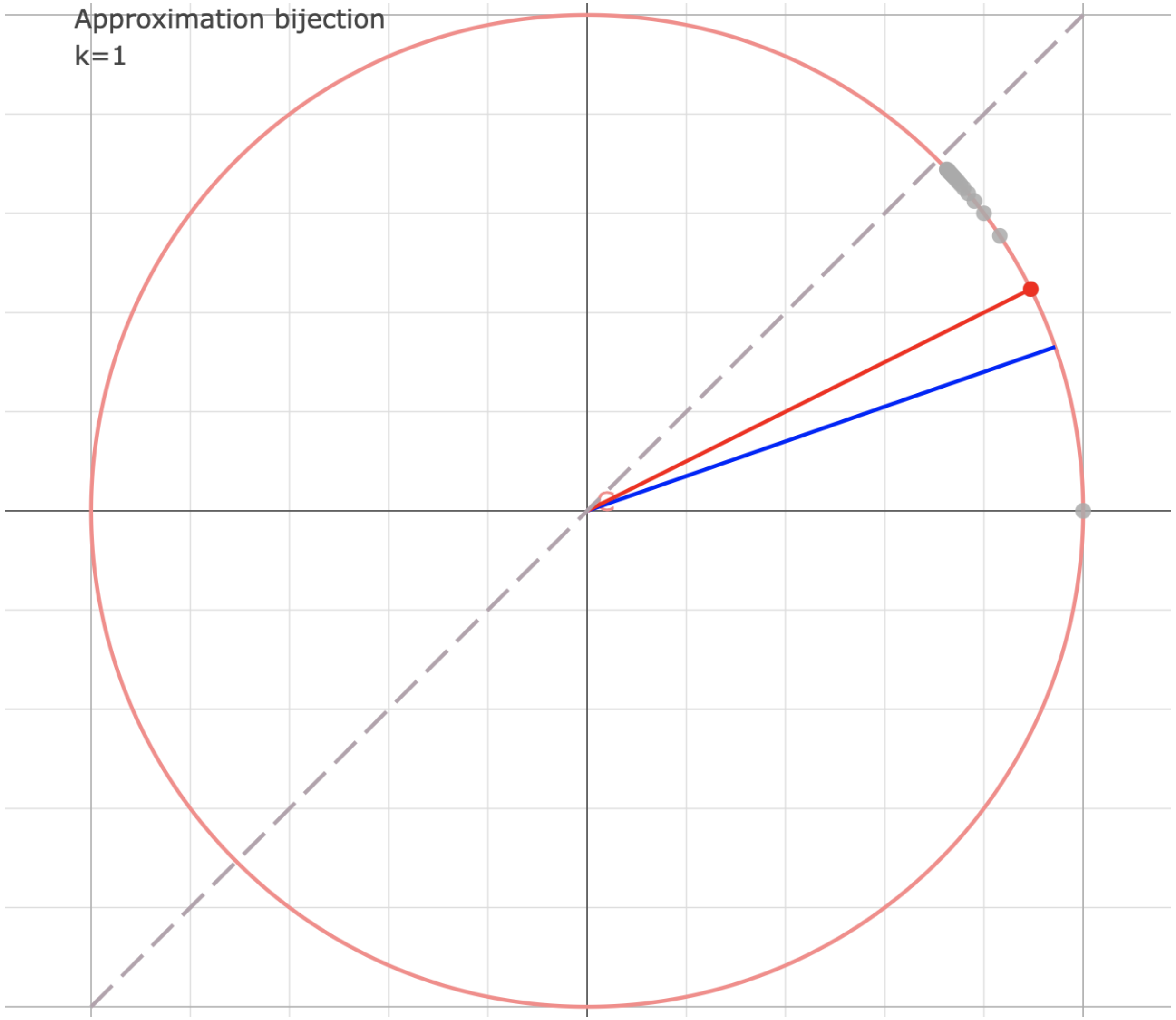
**Problème** : trouver la plus "proche" réflexion bijective



# Bijectivite et approximations

$$\arg\min_{k} \left|\tilde{\theta} - \theta\right|$$



# Approximations pour les rotations digitales

# Rotations digitales bijective à partir de réflexions

- Composition d'une reflexion digitale (axe $\mathbf{e}_1$) et d'une reflexion digitale bijective

$\rightarrow$ rotation digitale bijective

# Rotations digitales bijective à partir de réflexions

- Composition d'une reflexion digitale (axe $\mathbf{e}_1$) et d'une reflexion digitale bijective

$\rightarrow$ rotation digitale bijective

- **Composition de 2 réflexions digitales bijectives**

$\rightarrow$ **approximation bijective d'une rotation digitale**

# Rotations digitales bijective à partir de reflexions

## Idée:

$\hookrightarrow$ Approximer une rotation Euclidienne d'angle $\theta$ à partir de 2 réflexions bijectives

## Comment choisir les 2 réflexions digitales?

# Rotations digitales bijectives à partir de réflexions

## Comment choisir les 2 réflexions digitales?

- Contrainte: angle entre les 2 vecteur normaux est $\frac{\theta}{2}$

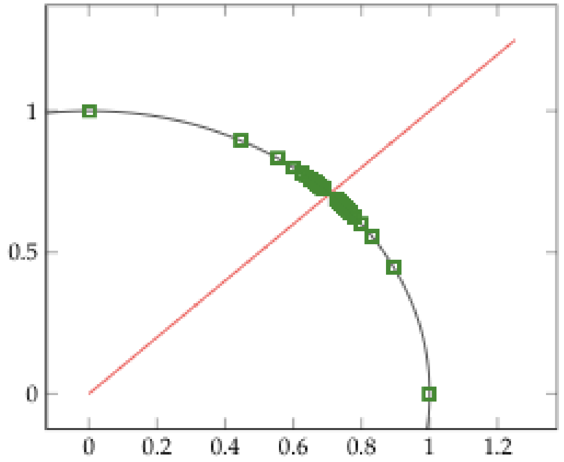
  où $\theta$ est l'angle de rotation

# Rotations digitales bijective à partir de réflexions

## Méthode

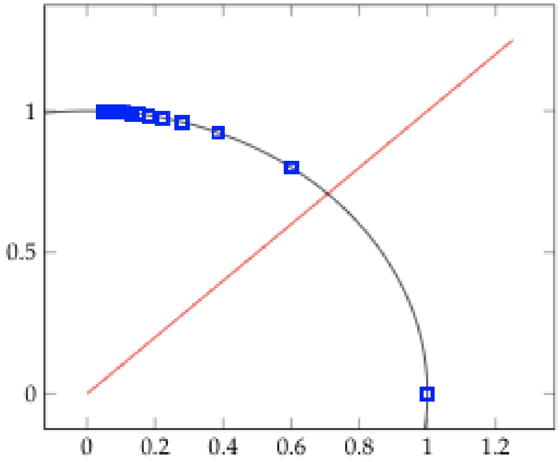
- Etant donné $k_{\max}$ et $\mathbf{B}_{k_{\max}}$ (reflexions bijectives)
- Boucler sur les réflexions digitales bijectives $\mathbf{m}_1 \in \mathbf{B}_{k_{\max}}$
- Chercher $\mathbf{m}_2$ tel que l'angle entre $\mathbf{m}_1$ et $\mathbf{m}_2$ soit le demi angle de rotation.
- Retourner le couple $\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2$ dont l'angle relatif est le plus proche de $\frac{\theta}{2}$

# Distribution obtenue



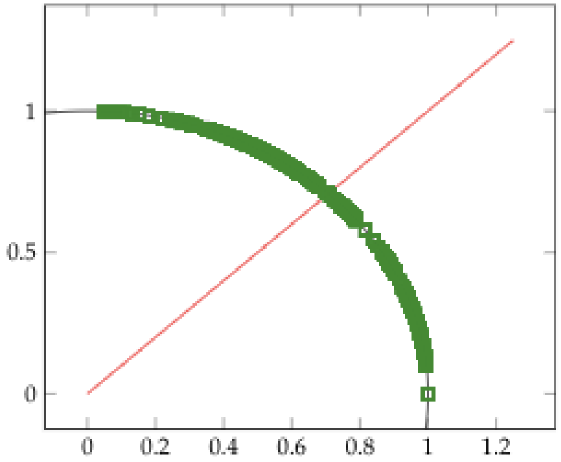

Réflexions digitales bijectives

$$\mathbf{m} = -(k+1)\mathbf{e}_1 + k\mathbf{e}_2, k \in \mathbb{N}$$




Rotations digitales bijectives

$$\{\cos(\theta), \sin(\theta)\} = \left\{\frac{2k+1}{2k^2+2k+1}, \frac{2k(k+1)}{2k^2+2k+1}\right\}$$




Rotations digitales bijectives par 2 réflexions digitales bijectives

# Conclusion

## Nouvelles rotations digitales bijectives à partir de réflexions digitales bijectives

$\hookrightarrow$ plus de rotations digitales bijectives

$\hookrightarrow$ méthode simple

$\hookrightarrow$ peut etre étendue …

## Perspective

$\hookrightarrow$ comparaison des principales méthodes de rotations bijectives

quasi-shears, FFT, rotations à partir de reflexions bijectives à droites digitales (Andres), …

# Merci pour votre attention!

Questions?