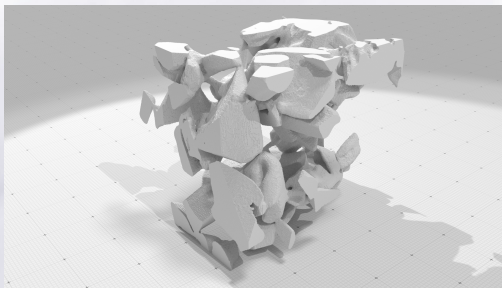


Algorithmes de type "plane-probing"
Analyse sans paramètre des surfaces digitales

Directeurs : David Coeurjolly, Tristan Roussillon
Doctorante : Jui-Ting Lu

Université de Lyon, INSA Lyon, LIRIS, France

PARAmeter-free Analysis of Digital Surfaces (PARADIS)



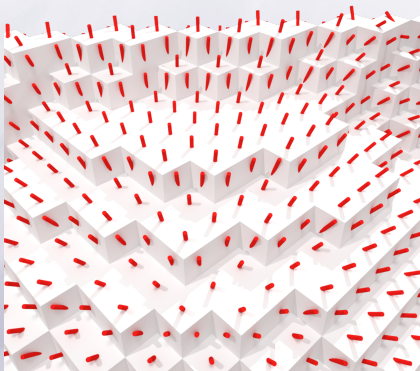
Le projet PARADIS² porte sur la géométrie des frontières des volumes 3D, appelées surfaces digitales.

1. Données de neige acquises par 3SR Lab et CEN/CNRM - GAME URA 1357/Météo-France - CNRS, projet DigitalSnow

2. PARADIS ANR-18-CE23-0007-01



Objectif de la thèse



Date de début : 1er janvier 2021.

- ≡ Implémenter les estimateurs de quantités du premier ordre.
- ≡ Étudier la convergence multigrille de ces estimateurs.
- ≡ Les applications.

Plan

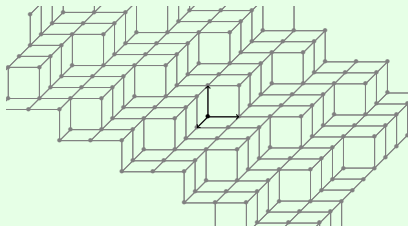
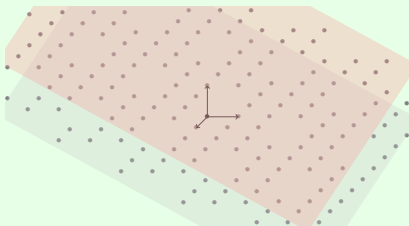
- 1 Introduction
- 2 Différents algorithmes de type "plane-probing"
- 3 Les invariants

Plan digital

$$P(\mathbf{N}, \mu) = \{x \in \mathbb{Z}^3 \mid \mu \leq x \cdot \mathbf{N} < \mu + \omega\}.$$

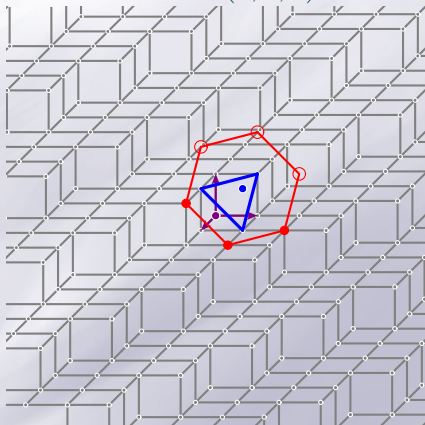
- ≡ vecteur normal $\mathbf{N}(a, b, c)$ avec $a, b \in \mathbb{Z}$, $\gcd(a, b, c) = 1$, on suppose que $0 < a \leq b$ et on note l'épaisseur $\omega := \|\mathbf{N}\|_1$.
- ≡ décalage à l'origine $\mu \in \mathbb{Z}$, on suppose $\mu = 0$.

Plan digital de normale (2, 6, 15)



Plane-probing

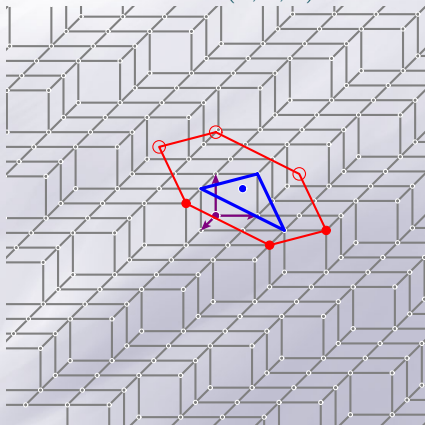
Normale (1, 2, 5)



- ≡ Un prédicat **InPlane** :
 $x \in P(\mathbf{N}, 0)$?
- ≡ Un voisinage \mathcal{N} .
- ≡ Met à jour un sommet par iteration.
- ≡ Terminaison : $N(\mathbf{T}) = \|\mathbf{N}\|_1$.
- ≡ **DGtal** : Digital Geometry Tools and Algorithms Library

Plane-probing

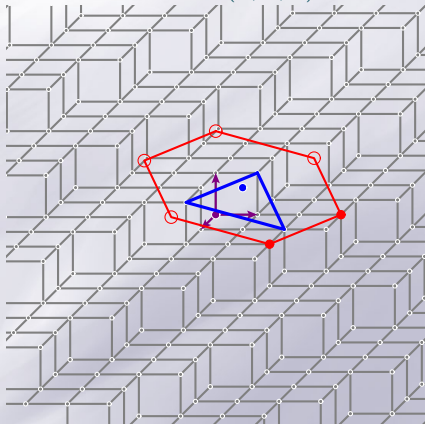
Normale (1, 2, 5)



- ≡ Un prédicat **InPlane** :
 $x \in P(\mathbf{N}, 0)$?
- ≡ Un voisinage \mathcal{N} .
- ≡ Met à jour un sommet par iteration.
- ≡ Terminaison : $N(\mathbf{T}) = \|\mathbf{N}\|_1$.
- ≡ **DGtal** : Digital Geometry Tools and Algorithms Library

Plane-probing

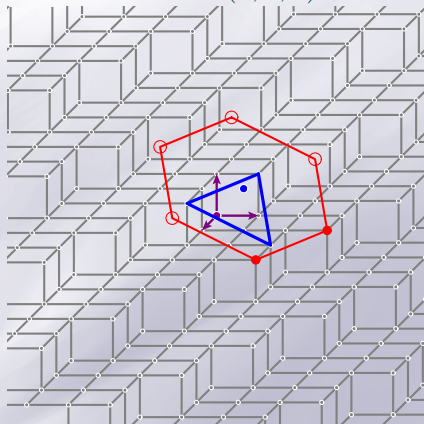
Normale (1, 2, 5)



- ≡ Un prédicat **InPlane** :
 $x \in P(\mathbf{N}, 0)$?
- ≡ Un voisinage \mathcal{N} .
- ≡ Met à jour un sommet par iteration.
- ≡ Terminaison : $N(\mathbf{T}) = \|\mathbf{N}\|_1$.
- ≡ **DGtal** : Digital Geometry Tools and Algorithms Library

Plane-probing

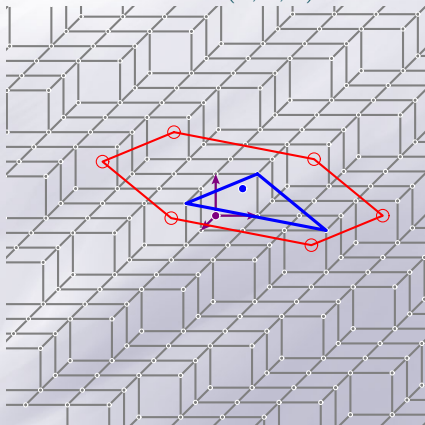
Normale (1, 2, 5)



- ≡ Un prédicat **InPlane** :
 $x \in P(\mathbf{N}, 0)$?
- ≡ Un voisinage \mathcal{N} .
- ≡ Met à jour un sommet par iteration.
- ≡ Terminaison : $N(\mathbf{T}) = \|\mathbf{N}\|_1$.
- ≡ **DGtal** : Digital Geometry Tools and Algorithms Library

Plane-probing

Normale (1, 2, 5)



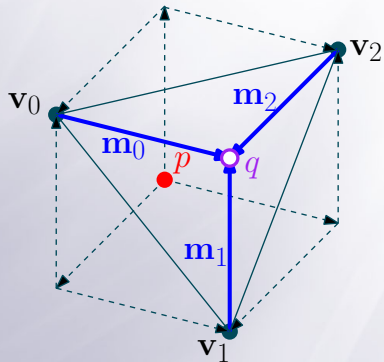
- ≡ Un prédicat **InPlane** :
 $x \in P(\mathbf{N}, 0)$?
- ≡ Un voisinage \mathcal{N} .
- ≡ Met à jour un sommet par iteration.
- ≡ Terminaison : $N(\mathbf{T}) = \|\mathbf{N}\|_1$.
- ≡ **DGtal** : Digital Geometry Tools and Algorithms Library

Initialisation

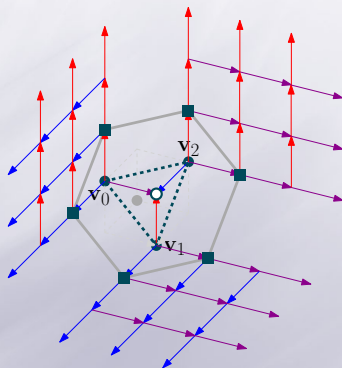
Étant donné un point initial $\mathbf{p} \in \mathbf{P}$, on a un triangle initial $\mathbf{T}^{(0)} := (\mathbf{v}_k^{(0)})_{k \in \{0,1,2\}}$ tel que $(\forall k) \mathbf{v}_k^{(0)} := \mathbf{p} + \mathbf{e}_k + \mathbf{e}_{k+1}$, où $(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ est la base canonique de \mathbb{Z}^3 .

$$\mathbf{q} := \mathbf{p} + \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 \notin \mathbf{P},$$

$$\forall k \in \{0, 1, 2\}, \mathbf{m}_k^{(i)} = \mathbf{q} - \mathbf{v}_k^{(i)}.$$

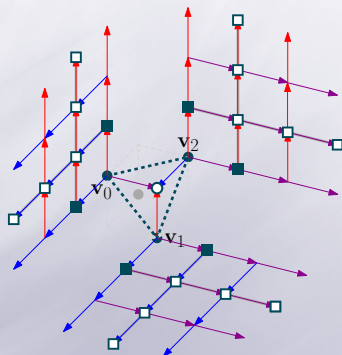


Algorithme H



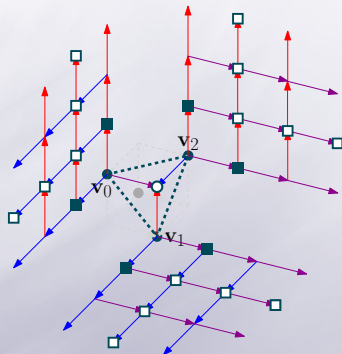
$$\mathcal{N}_H = \left\{ \mathbf{v}_k^{(i)} + \mathbf{m}_{k+1}^{(i)}, \mathbf{v}_k^{(i)} + \mathbf{m}_{k+2}^{(i)} \mid k \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

Algorithme R/R1



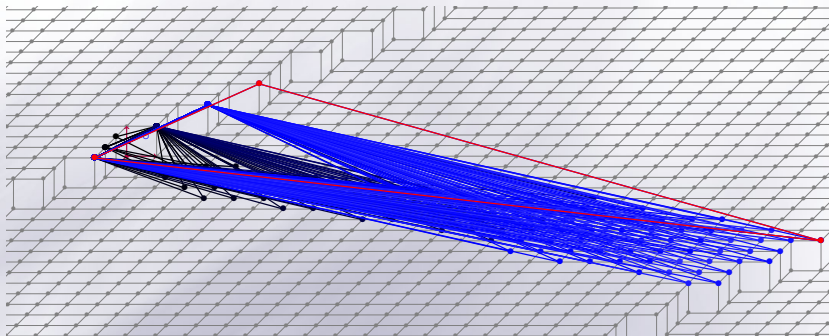
$$\mathcal{N}_R = \left\{ \mathbf{v}_k^{(i)} + \mathbf{m}_{k+1}^{(i)} + \lambda \mathbf{m}_{k+2}^{(i)}, \mathbf{v}_k^{(i)} + \lambda \mathbf{m}_{k+1}^{(i)} + \mathbf{m}_{k+2}^{(i)} \mid \lambda \in \mathbb{N}; k \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

Algorithme Rnew



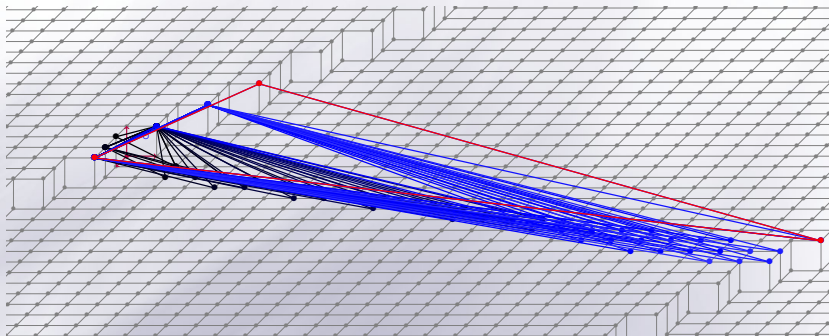
$$\mathcal{N}_{Rnew} = \left\{ \mathbf{v}_k^{(i)} + \alpha \mathbf{m}_{k+1}^{(i)} + \beta \mathbf{m}_{k+2}^{(i)} \mid \alpha, \beta \in \mathbb{N}; k \in \{0, 1, 2\} \right\}$$

Exemple : Normale (3, 7, 179)



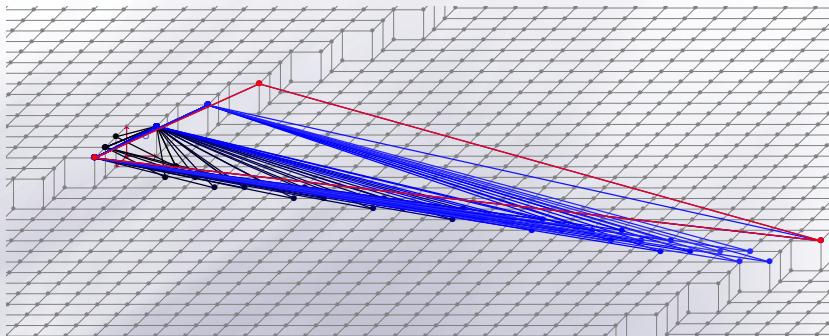
Nombre d'itération :
 $H > R/R1 > R_{new}$

Exemple : Normale (3, 7, 179)



Nombre d'itération :
 $H > R/R1 > R_{new}$

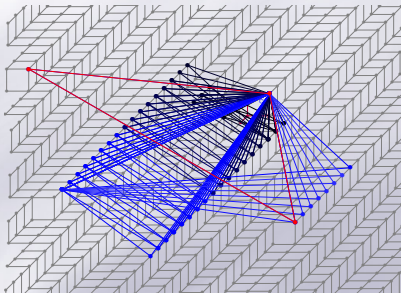
Exemple : Normale (3, 7, 179)



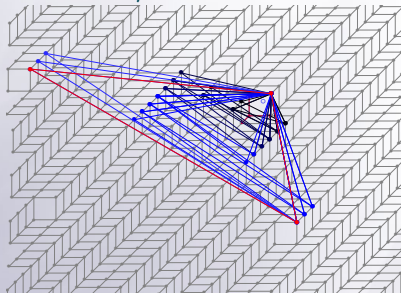
Nombre d'itération :
 $H > R/R1 > R_{new}$

Exemple : Normale (1, 73, 100)

H



R/R1 et Rnew



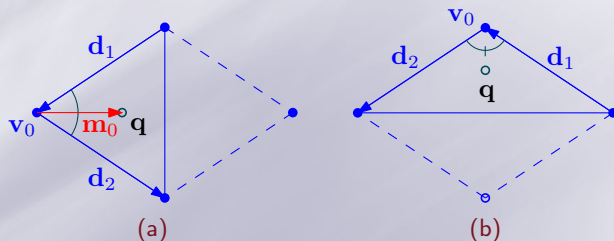
L'algorithme R est plus local que l'algorithme H.

Propriétés

Propriétés losanges

Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et $k = 0, 1, 2$,

$$P_{\diamond_k}^{(i)} := \mathbf{d}_{k+1}^{(i)} \cdot \mathbf{d}_{k+2}^{(i)} \leq 0 \text{ or } \mathbf{q} - \mathbf{m}_k^{(i)} - \mathbf{d}_{k+1}^{(i)} + \mathbf{d}_{k+2}^{(i)} \notin \mathbf{P}.$$



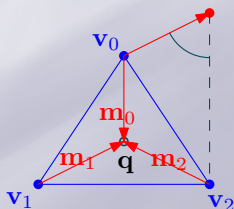
Propriétés

Propriétés triangles

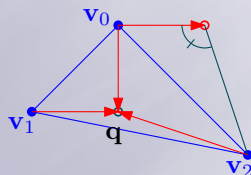
Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et $k = 0, 1, 2$,

$$P_{\triangleright_k}^{(i)} := \mathbf{q} - \mathbf{m}_k^{(i)} + \mathbf{m}_{k+1}^{(i)} \notin \mathbf{P} \text{ ou } \mathbf{m}_{k+1}^{(i)} \cdot \left(-\mathbf{m}_k^{(i)} + \mathbf{m}_{k+1}^{(i)} + \mathbf{m}_{k+2}^{(i)} \right) \geq 0,$$

$$P_{\triangleleft_k}^{(i)} := \mathbf{q} - \mathbf{m}_k^{(i)} + \mathbf{m}_{k+2}^{(i)} \notin \mathbf{P} \text{ ou } \mathbf{m}_{k+2}^{(i)} \cdot \left(-\mathbf{m}_k^{(i)} + \mathbf{m}_{k+1}^{(i)} + \mathbf{m}_{k+2}^{(i)} \right) \geq 0.$$



(c)



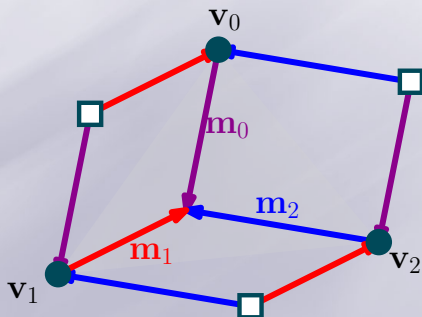
(d)

Propriétés

Propriétés Delaunay

Pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et $k = 0, 1, 2$, en notant $S^{(i)}$ la sphere circonscrite qui passe par les sommets des triangles $\mathbf{T}^{(i)}$ et $\mathbf{T}^{(i+1)}$,

$$P_{\text{DEL}_k}^{(i)} := \mathbf{q} - \mathbf{m}_{k+1}^{(i)} - \mathbf{m}_{k+2}^{(i)} \notin S^{(i)}.$$



Invariants et algorithmes

Algo.	$P_{\diamond_k}^{(i)}$	$P_{\triangleright_k}^{(i)}, P_{\triangleleft_k}^{(i)}$	$P_{\text{DEL}_k}^{(i)}$
H	x	x	x
R/R1	o	o	x
Rnew	o	o	o

Pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$ et $k = 0, 1, 2$, les propriétés $P_{\triangleright_k}^{(i)}$, $P_{\triangleleft_k}^{(i)}$, $P_{\diamond_k}^{(i)}$ et $P_{\text{DEL}_k}^{(i)}$ sont vraies pour l'algorithme R_{new} .

Preuve

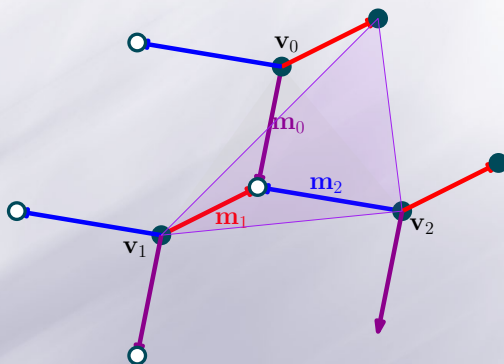
Par récurrence.

Conditions

	$\mathbf{v}_0^{(i+1)} = \mathbf{v}_0^{(i)} + \mathbf{m}_1^{(i)} \in \mathcal{N}_H$	$\mathbf{v}_0^{(i+1)} \notin \mathcal{N}_H$
$\angle 1^{(i+1)}$	$P_{\diamond_1}^{(i)}$	—
$\angle 2^{(i+1)}$	$\mathbf{v}_0^{(i)} + \mathbf{m}_2^{(i)} \in \mathbf{P}$	—
$\angle 0^{(i+1)}$	$P_{\triangleright_0}^{(i)}$	$P_{\text{DEL}_0}^{(i)}$

Soit n la dernière étape et on suppose que 0 est l'indice du sommet mise à jour à l'étape $n - 1$. Si $\mathbf{v}_0^{(n-1)} + \mathbf{m}_1^{(n-1)} \in \mathbf{P}$ et $\mathbf{v}_0^{(n-1)} + \mathbf{m}_2^{(n-1)} \in \mathbf{P}$ alors $\mathbf{T}^{(n)}$ est un triangle aigu.

$Card(\mathcal{N}_H \cap \mathbf{P}) = 2$ ou 3 et les points de $\mathcal{N}_H \cap \mathbf{P}$ sont consécutifs autour de \mathbf{q} .



Si $\mathbf{v}_0^{(i)} + \mathbf{m}_2^{(i)} \notin \mathbf{P}$, $\mathbf{v}_0^{(i)} + \mathbf{m}_1^{(i)} \in \mathbf{P}$ et $\mathbf{v}_2^{(i)} + \mathbf{m}_1^{(i)} \in \mathbf{P}$, alors $i + 1 \neq n$ car $\mathbf{v}_2^{(i+1)} + \mathbf{m}_1^{(i+1)} \in \mathbf{P}$.

Base réduite

Lemme

Soit n la dernière étape. Le dernier triangle $\mathbf{T}^{(n)}$ est un **triangle aigu**.

Définition

Soient u et v deux vecteurs du plan digital. (u, v) forme une **base réduite** si

$$\max(\|u\|, \|v\|) \leq \min(\|u + v\|, \|v - u\|). \quad (1)$$

Théorème

Les algorithmes R et Rnew donnent une base réduite.

- ≡ On est maintenant capables de montrer que pour R et Rnew :
 - L'angle du sommet mis à jour est toujours aigu.
 - Le dernier triangle $\mathbf{T}^{(n)}$ est un triangle aigu.
 - Les algorithmes R et Rnew donnent une base réduite.
- ≡ Perspectives à court terme :
 - Comparer R et Rnew en temps et qualité.
 - Étudier le lien entre Rnew et triangulation de Delaunay.