GROUPE DE TRAVAIL GDMM 2021

Alexandra Bac

LIS Marseille - équipe G-MOD

TOPOLOGIE ALGÉBRIQUE ALGORITHMIQUE

Introduction

Topologie algébrique et GDMM

Topologie

« forme » d'un espace à déformation continue près - indépendamment de la géométrie (Euler - 1736)

Homéomorphisme
$f : E \to F$ bijective, continue, f^{-1} continue

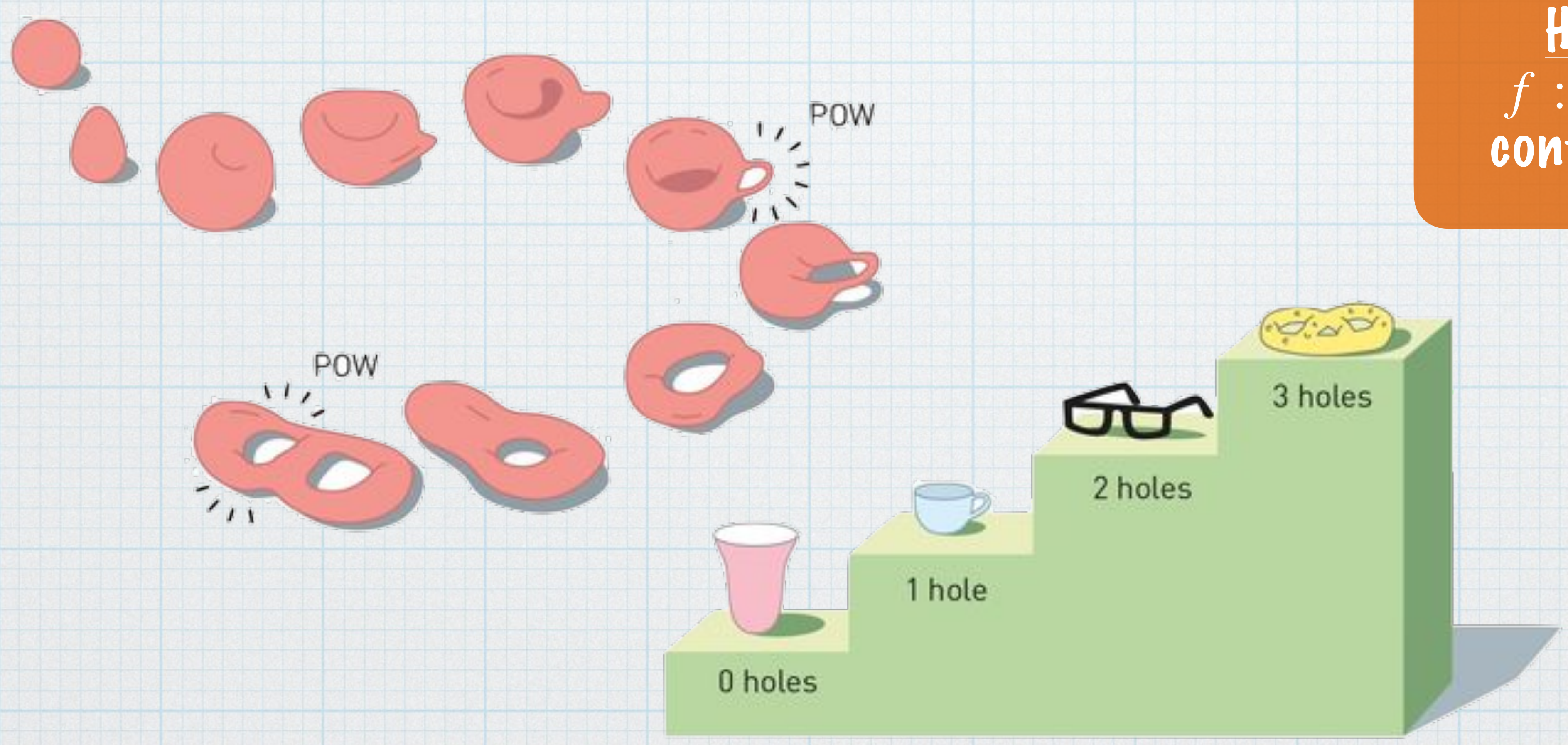


Illustration: ©Johan Jarnestad/The Royal Swedish Academy of Sciences

Topologie algébrique et GDMM

<u>Topologie</u>

« forme » d'un espace à déformation continue près - indépendamment de la géométrie (Euler - 1736)

Invariants topologiques

Composantes connexes

...

Topologie algébrique et GDMM

Topologie

Algèbre

Topologie algébrique

Objet

Objet algébrique (groupe)

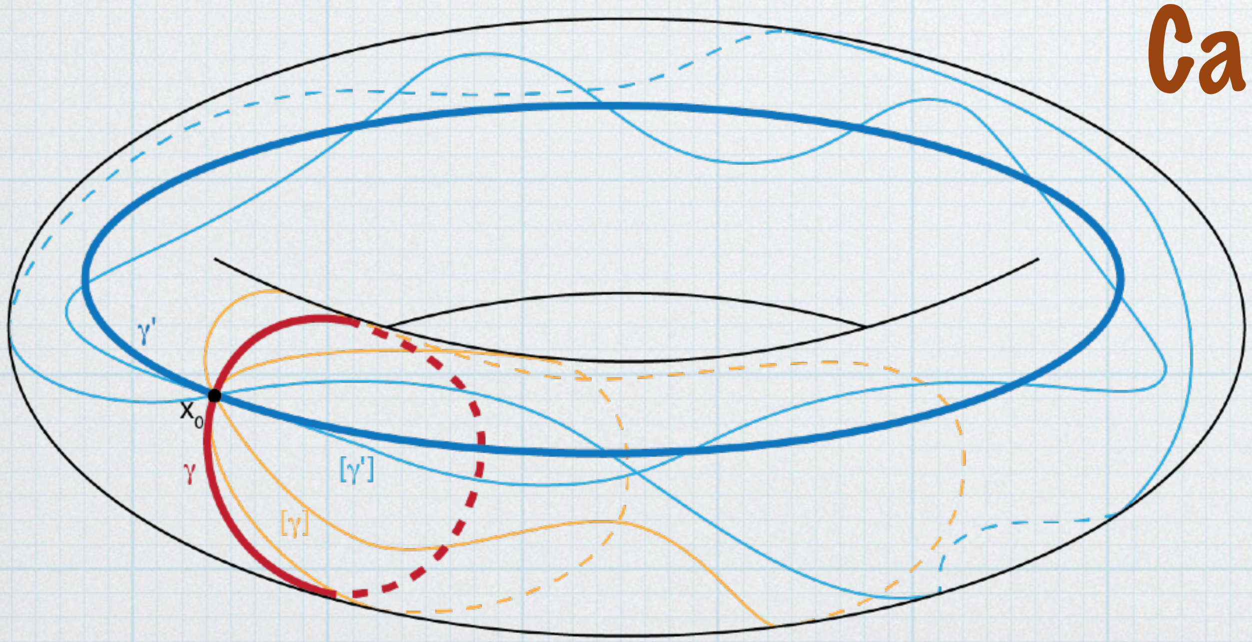
Topologie algébrique

Topologie algébrique

1er groupe fondamental
-
Groupes d'homotopie

Homologie

Calcul ?



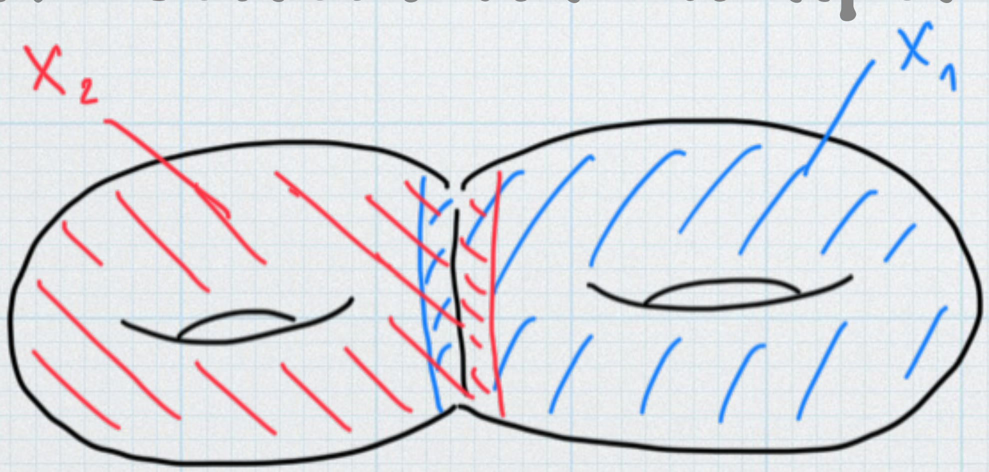
Topologie algébrique

Topologie algébrique

1er groupe fondamental
-
Groupes d'homotopie

Homologie

Th. Seifert-Van Kampen



$X = X_1 \cup X_2$ $\quad$ $X_1 \cap X_2$ connexe par arc

Présentation de groupe :

$$\pi_1(X) = \big(\pi_1(X_1) \star \pi_1(X_2)\big)/N$$

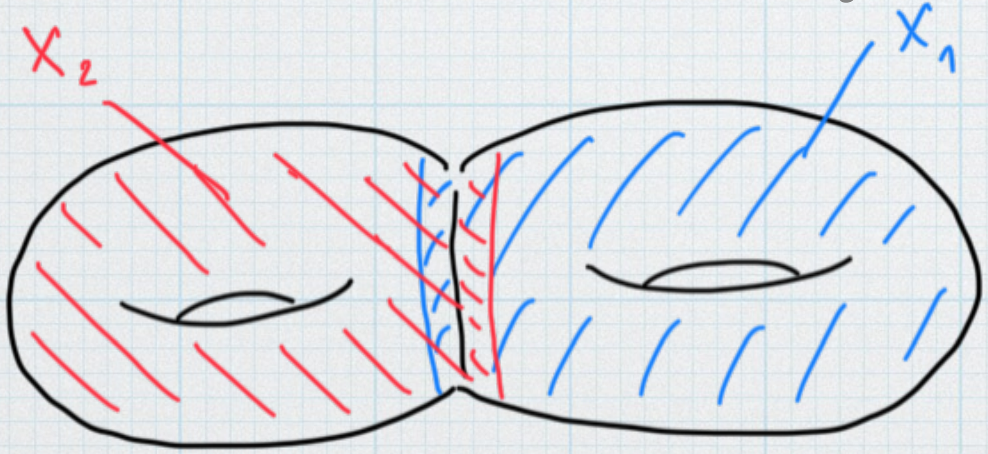
Topologie algébrique

Topologie algébrique

1er groupe fondamental
-
Groupes d'homotopie

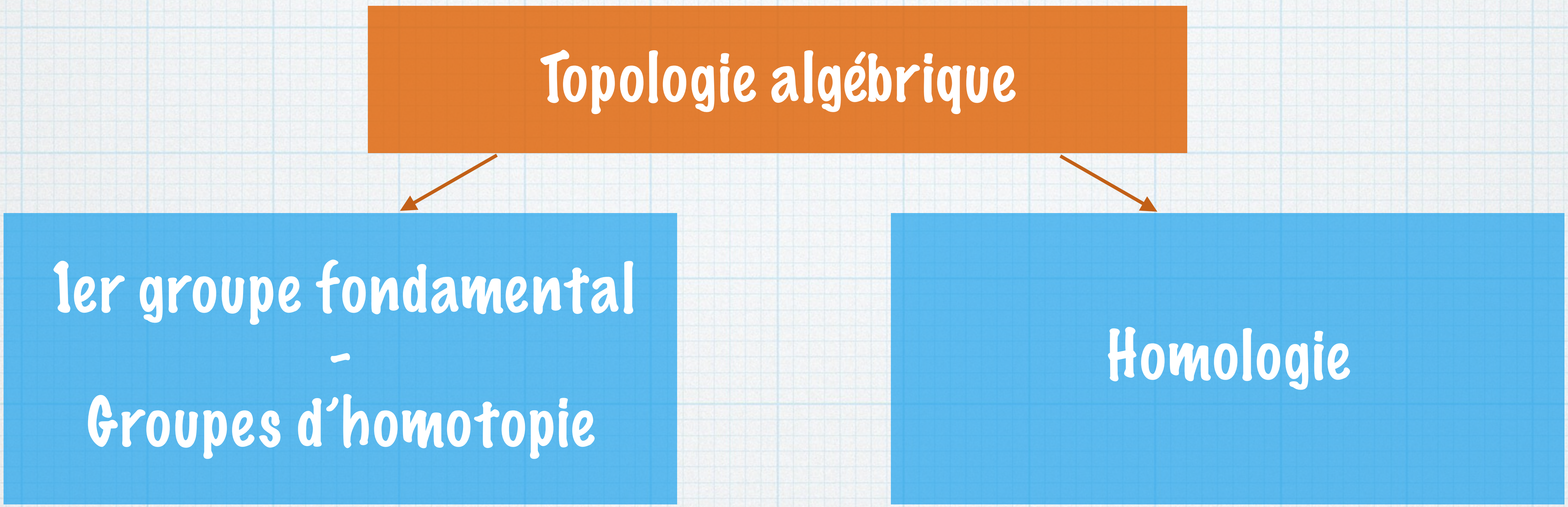
Homologie

Th. Seifert-Van Kampen



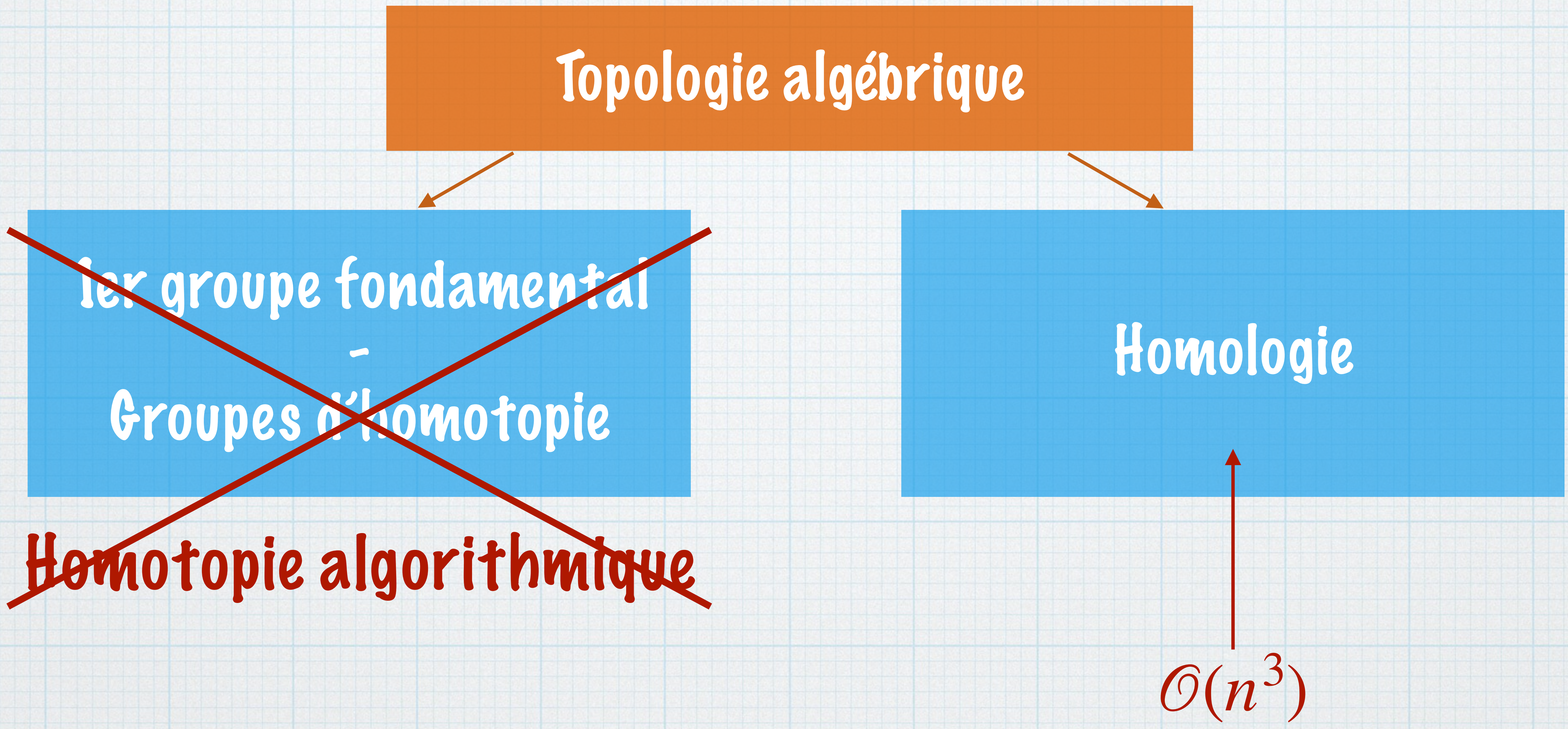
$$\pi_1(X) = \langle \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 \mid \alpha_1\beta_1\alpha_1^{-1}\beta_1^{-1}, \alpha_2\beta_2\alpha_2^{-1}\beta_2^{-1} \rangle$$

Topologie algébrique



<u>Théorème de Novikov-Boone</u>
Représentation d'un groupe $\simeq$ groupe trivial non décidable ...

Topologie algébrique



Plan

1. Homologie simpliciale
2. Aspects algorithmiques de l'homologie simpliciale [A. Bac]
3. Persistence homologique [A. Gonzalez Lorenzo]
4. Exemples d'applications

M2 Informatique et Mathématiques Discrètes (M2 IMD)
Marseille - Luminy
« Topologie algébrique discrète »

Homologie Simpliciale

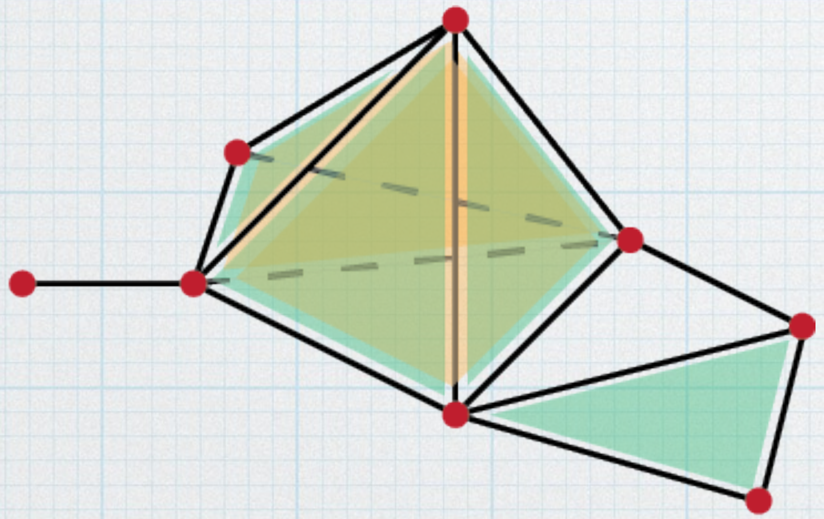
Homologie simpliciale

Topologie

Objet → Objet algébrique (groupe)

Trous

Complexe simplicial

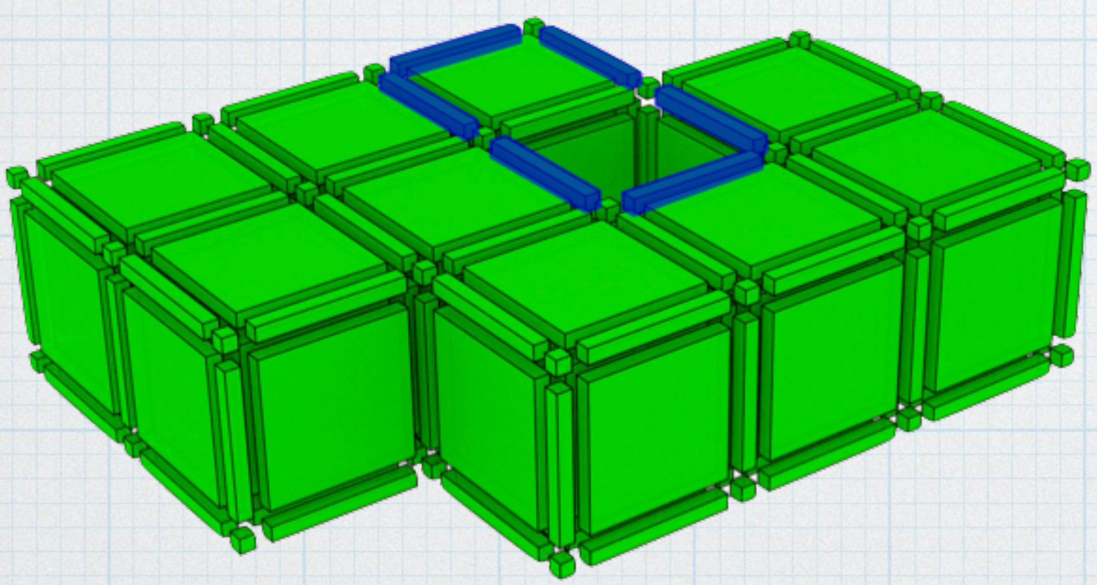


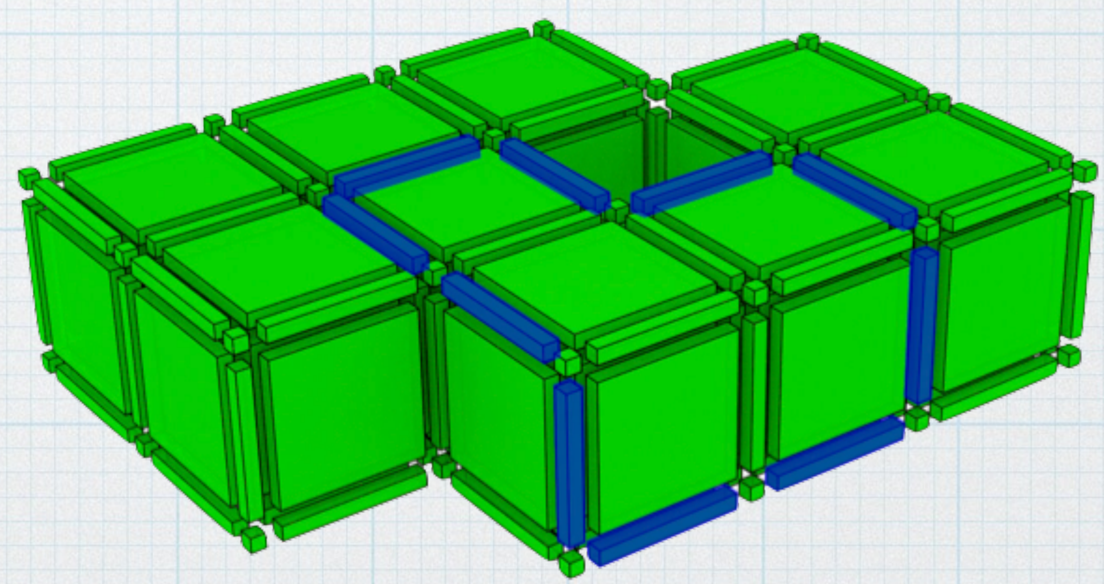
Homologie simpliciale

Cycles

Qui ne sont le bord de rien

Trous





Homologie simpliciale

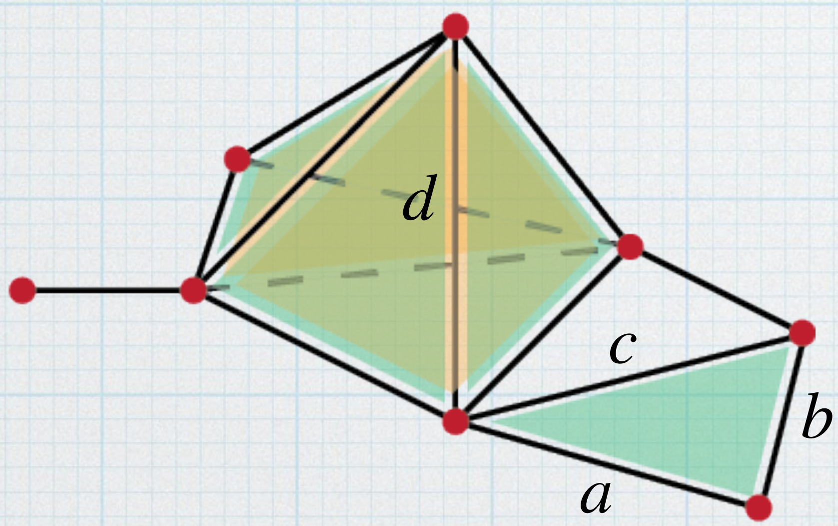
Topologie

Objet → Objet algébrique (groupe)

Complexe simplicial

Trous

Complexe de chaînes



$$C_n \quad C_{n-1} \quad \cdots \quad C_1 \quad C_0 \quad 0$$

Groupes :

K_q : q-cellules

$$C_q = Vect(K_q)$$

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c + \lambda_4 d$$

A corps ou anneau

$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

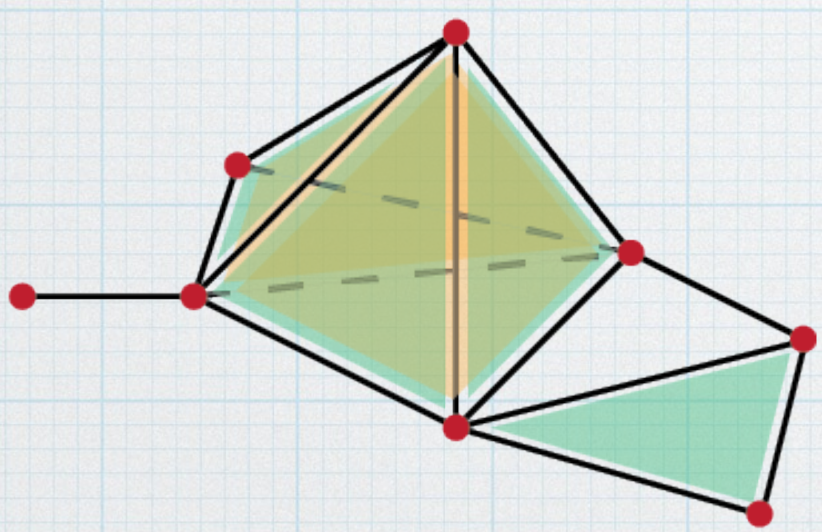
Homologie simpliciale

Objet — **Topologie** → Objet algébrique (groupe)

↕ **Trous**

Complexe simplicial

Complexe de chaînes



$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_2} C_0 \rightarrow 0$$

Opérateur de bord : $\partial_q : C_q \rightarrow C_{q-1}$

A corps ou anneau

Homologie simpliciale

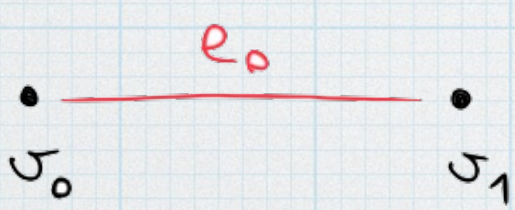
Topologie

Objet → Objet algébrique (groupe)

Trous

Complexe simplicial

Complexe de chaînes



$$\partial_1(e_0) = v_1 - v_0$$

A corps ou anneau

Homologie simpliciale

Topologie

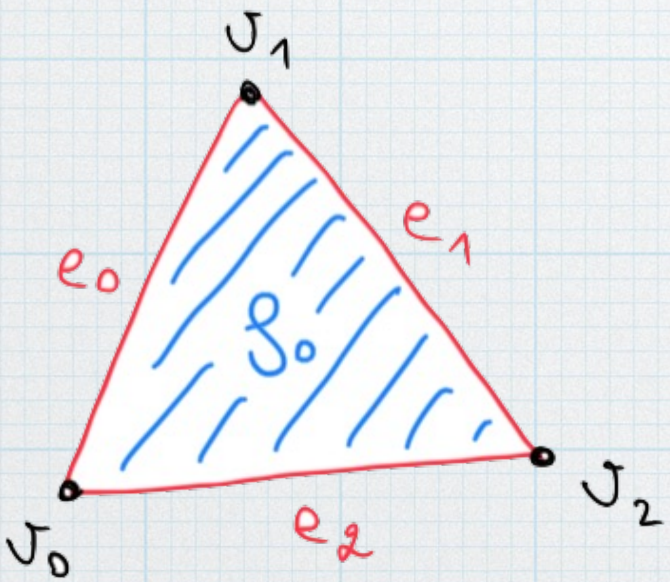
Objet

Objet algébrique (groupe)

Complexe simplicial

Trous

Complexe de chaînes



$$\partial_2(f_0) = -e_1 + e_2 - e_0$$

$$\partial_1(\boxed{-e_1 + e_2 - e_0}) = \quad \textbf{Cycle}$$

$$-(\cancel{v_2} - \cancel{v_1}) + (\cancel{v_2} - \cancel{v_0}) - (\cancel{v_1} - \cancel{v_0})$$

$$= 0$$

$\ker \partial$

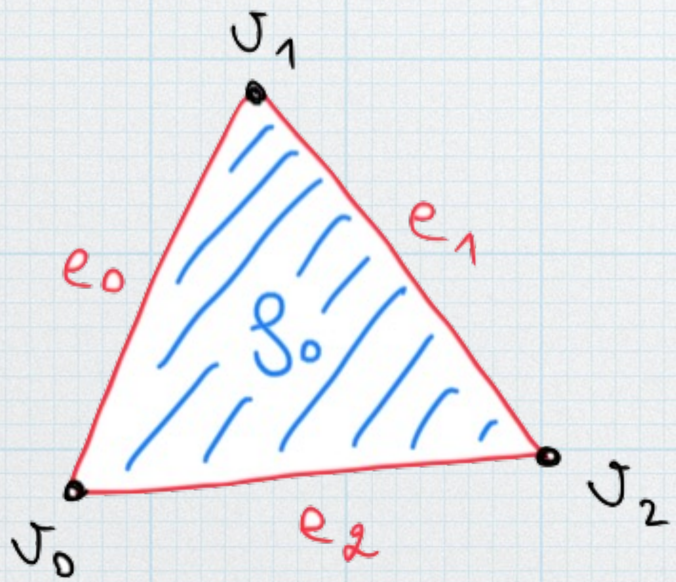
Homologie simpliciale

Topologie

Objet → Objet algébrique (groupe)

Trous

Complexe simplicial



Complexe de chaînes

$$\boxed{\partial_2(f_0)} = -e_1 + e_2 - e_0$$

Bord

$$\partial_1(-e_1 + e_2 - e_0) =$$

$$-(\cancel{v_2} - \cancel{v_1}) + (\cancel{v_2} - \cancel{v_0}) - (\cancel{v_1} - \cancel{v_0})$$

$$= 0$$

$\mathrm{Im}\,\partial$

Homologie simpliciale

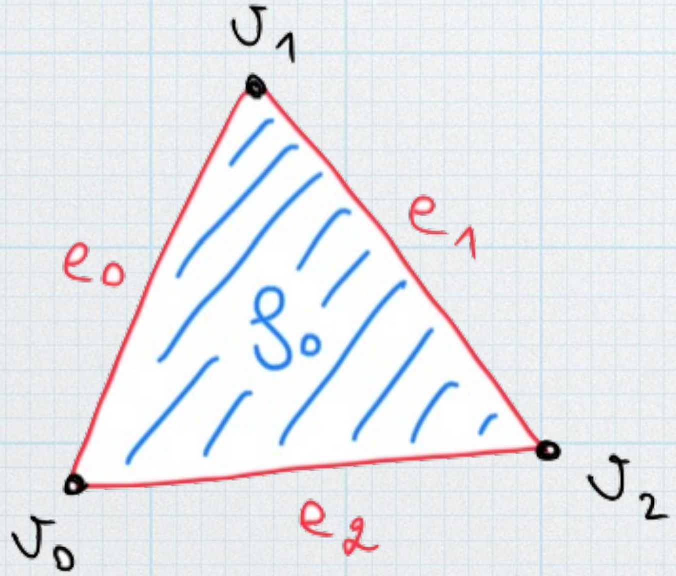
Topologie

$$\boxed{\text{Objet}} \longrightarrow \boxed{\text{Objet algébrique (groupe)}}$$

Trous

Complexe simplicial

Complexe de chaînes



$$\partial_2(f_0) = -e_1 + e_2 - e_0$$

$$\partial_1(-e_1 + e_2 - e_0) =$$

$$-(\cancel{v_2} - \cancel{v_1}) + (\cancel{v_2} - \cancel{v_0}) - (\cancel{v_1} - \cancel{v_0})$$

$$\boxed{= 0}$$

Bords $\subseteq$ cycles

Homologie simpliciale

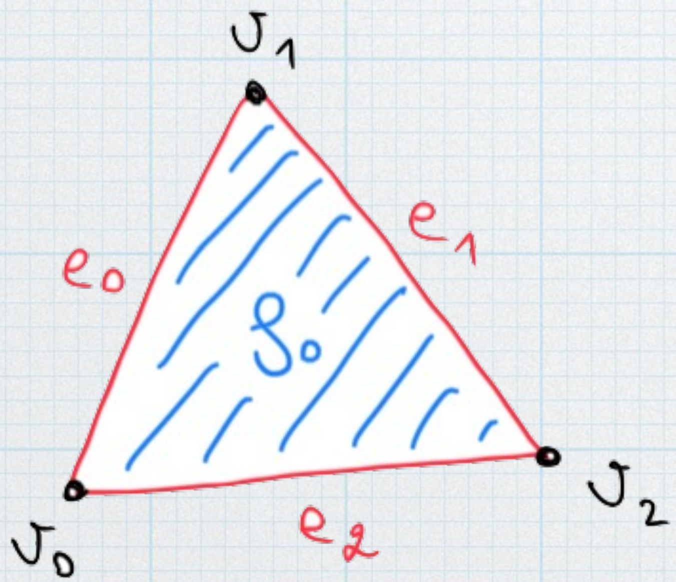
Topologie

Objet → Objet algébrique (groupe)

Trous

Complexe simplicial

Complexe de chaînes



$$\partial_2(f_0) = -e_1 + e_2 - e_0$$

$$\partial_1(-e_1 + e_2 - e_0) =$$

$$-(\cancel{v_2} - \cancel{v_1}) + (\cancel{v_2} - \cancel{v_0}) - (\cancel{v_1} - \cancel{v_0})$$

$$\boxed{= 0}$$

$$\operatorname{Im} \partial_{q+1} \subseteq \ker \partial_q$$

Homologie simpliciale

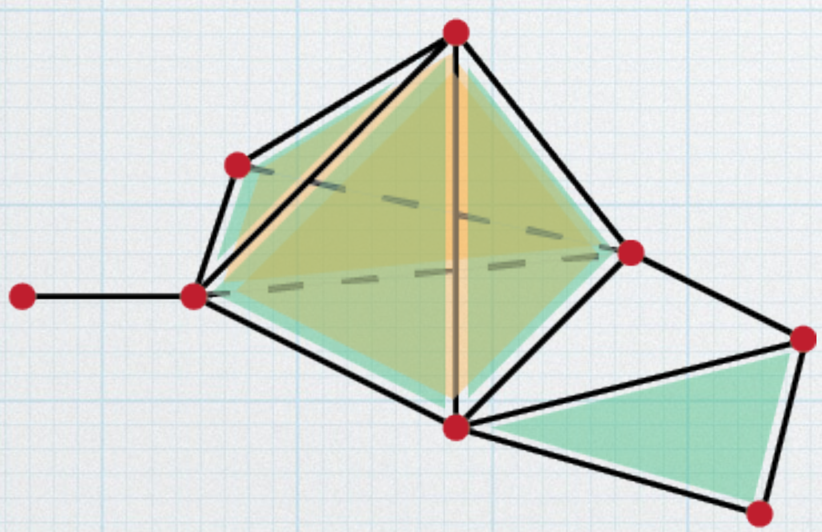
Topologie

Objet → Objet algébrique (groupe)

Trous

Complexe simplicial

Complexe de chaînes



$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_2} C_0 \to 0$$

Opérateur de bord : $\partial_q : C_q \to C_{q-1}$

$$\partial_q \partial_{q-1} = 0 \quad \forall q$$

Homologie simpliciale

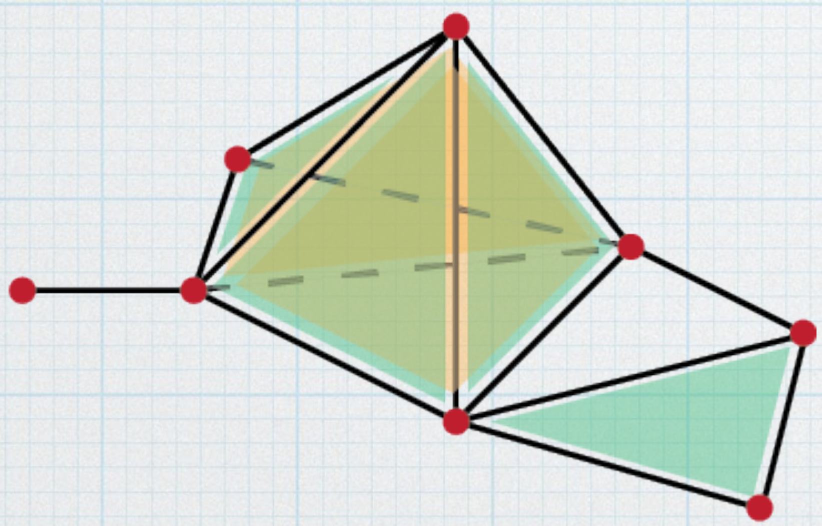
Topologie

Objet → Objet algébrique (groupe)

Trous

Complexe simplicial

Complexe de chaînes



$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_2} C_0 \rightarrow 0$$

q-ème groupe d'homologie

$$H_q(C) = \ker(\partial_q)/\mathrm{Im}\,(\partial_{q+1})$$

Homologie simpliciale

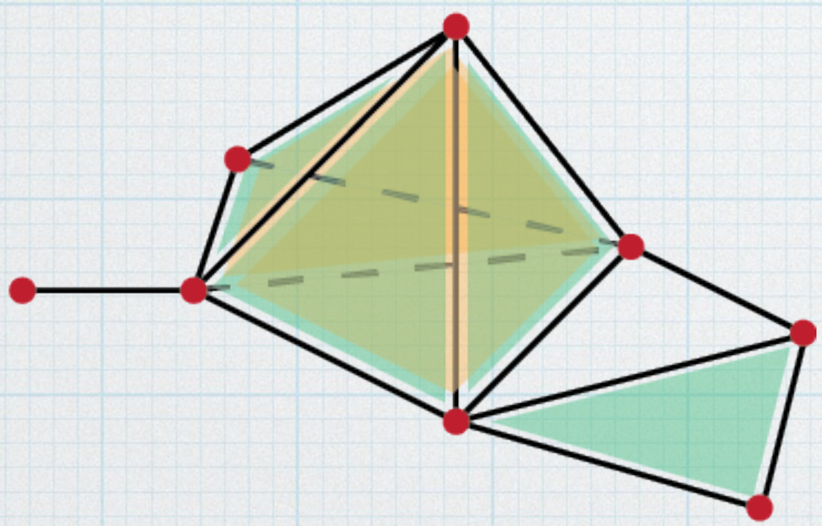
Topologie

Objet → Objet algébrique (groupe)

Trous

Complexe simplicial

Complexe de chaînes



$$C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \rightarrow 0$$

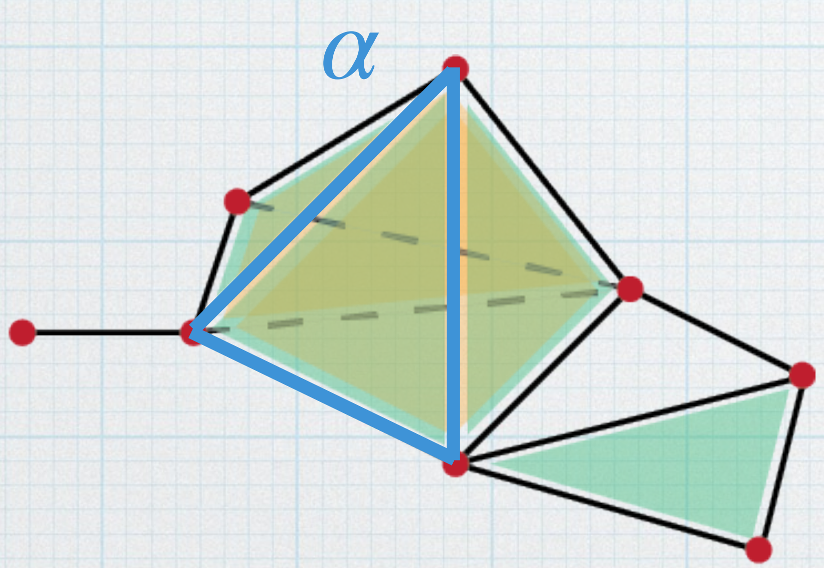
q-ème groupe d'homologie

$$H_q(C) = \boxed{\ker(\partial_q)}/\boxed{\mathrm{Im}\,(\partial_{q+1})}$$

Cycle Bord

Homologie simpliciale

$\alpha \sim \beta$ **si** $\beta - \alpha \in \mathrm{Im}\,(\partial_{q+1})$



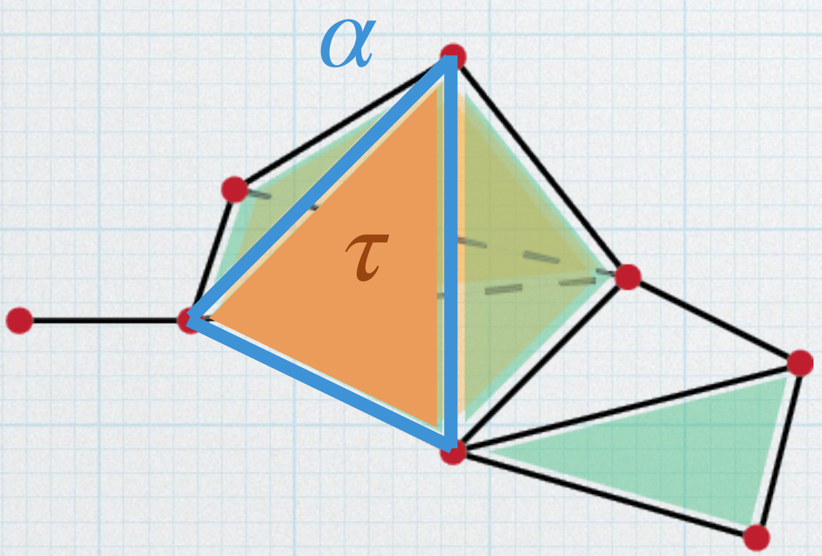
$$H_q(C) = \boxed{\ker(\partial_q)} / \boxed{\mathrm{Im}\,(\partial_{q+1})}$$

Cycle **Bord**

Homologie simpliciale

$\alpha \sim \beta$ **si** $\beta - \alpha \in \mathrm{Im}\,(\partial_{q+1})$

$$\alpha = 0 + \partial_2(\tau)$$



$$\alpha \sim 0$$

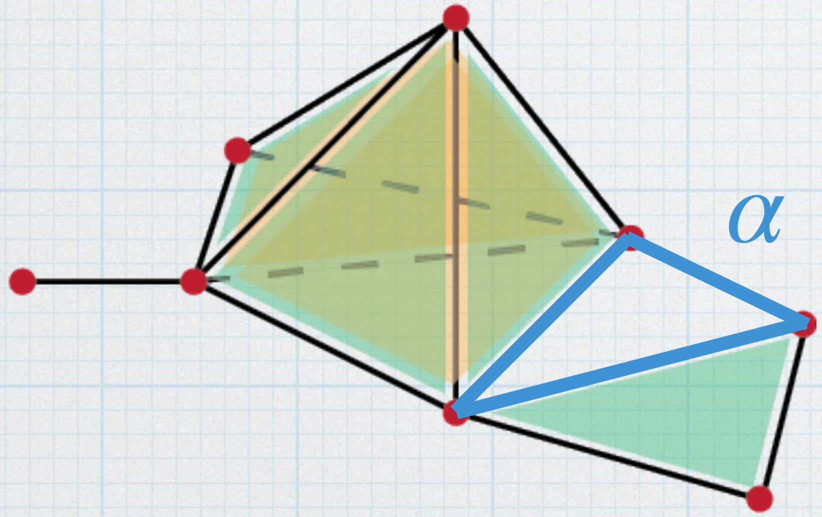
$$H_q(C) = \boxed{\ker(\partial_q)} / \boxed{\mathrm{Im}\,(\partial_{q+1})}$$

Cycle **Bord**

Homologie simpliciale

$\alpha \sim \beta$ **si** $\beta - \alpha \in \operatorname{Im}(\partial_{q+1})$

α ?



$$H_q(C) = \boxed{\ker(\partial_q)} / \boxed{\operatorname{Im}(\partial_{q+1})}$$

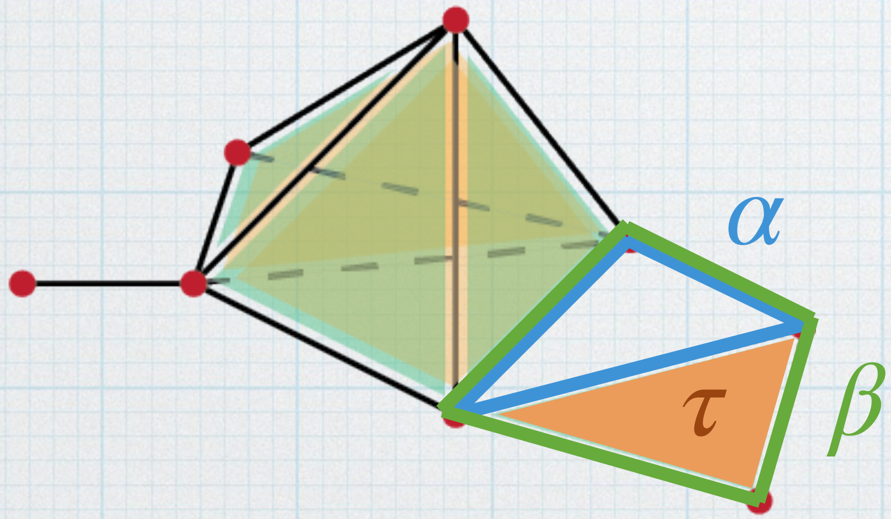
Cycle **Bord**

Homologie simpliciale

$\alpha \sim \beta$ **si** $\beta - \alpha \in \mathrm{Im}\,(\partial_{q+1})$

$$\beta = \alpha + \partial_2(\tau)$$

$$\alpha \sim \beta$$



$$H_q(C) = \boxed{\ker(\partial_q)} / \boxed{\mathrm{Im}\,(\partial_{q+1})}$$

Cycle **Bord**

Homologie simpliciale

$\alpha \sim \beta$ **si** $\beta - \alpha \in \operatorname{Im}(\partial_{q+1})$

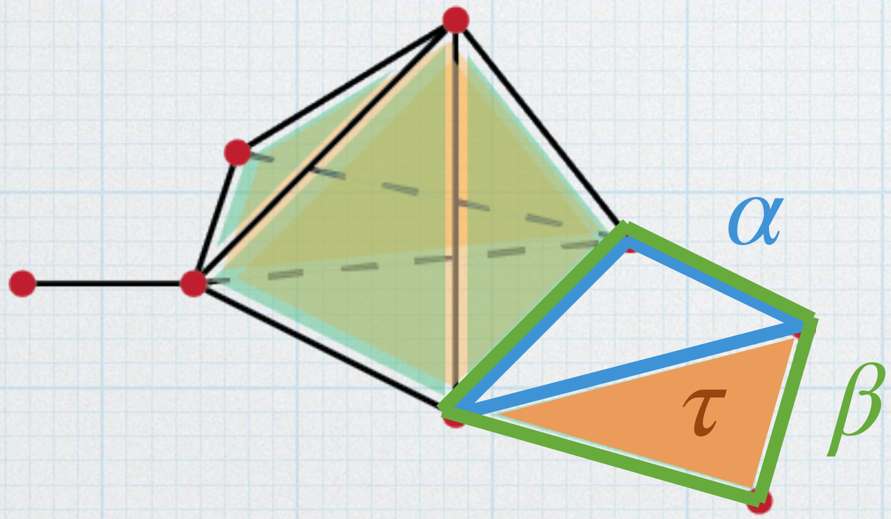
$\dot{\alpha}$ **classe**

$\{\lambda \cdot \dot{\alpha}\,;\, \lambda \in A\} \triangleleft H_q(C)$

$$\beta = \alpha + \partial_2(\tau)$$

$$\alpha \sim \beta$$

α **générateur**



$$H_q(C) = \boxed{\ker(\partial_q)} / \boxed{\operatorname{Im}(\partial_{q+1})}$$

Cycle **Bord**

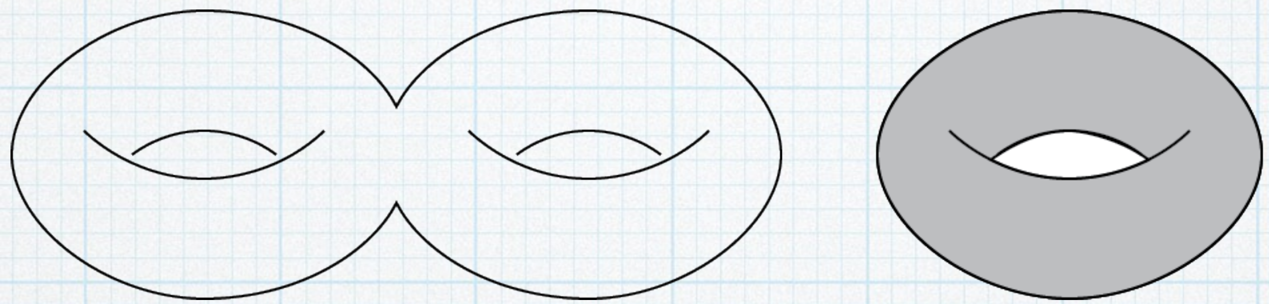
Homologie simpliciale

Groupes finiment engendrés :

$$H_q(C) \simeq \mathbb{Z}^{\beta_q} \times \mathbb{Z}/\lambda_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/\lambda_n\mathbb{Z}$$

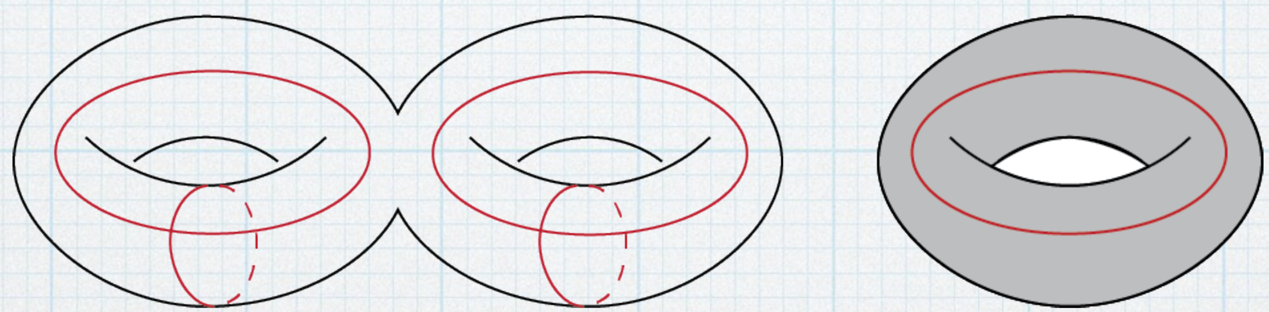
* $\beta_q \in \mathbb{N}$: nombres de Betti
* $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ avec $\lambda_i \mid \lambda_{i+1}$: coefficients de torsion
* Générateurs d'homologie

Homologie simpliciale



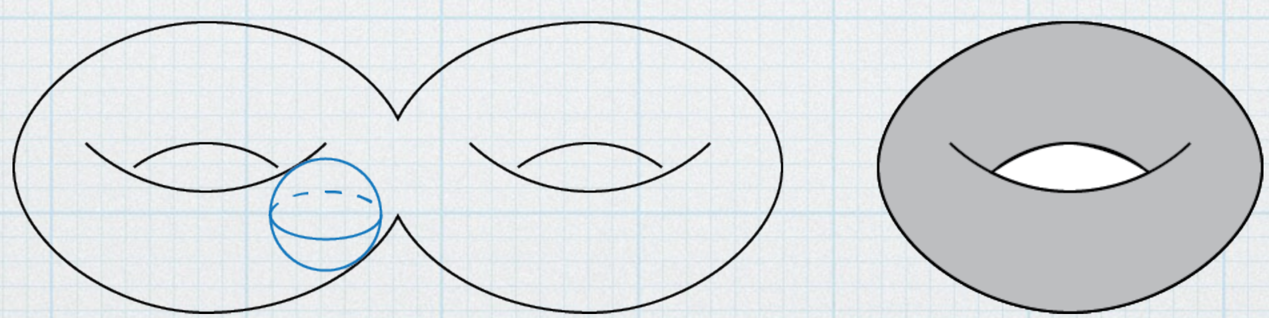
$\beta_0 = 2$

β_0 : nombre de composantes connexes



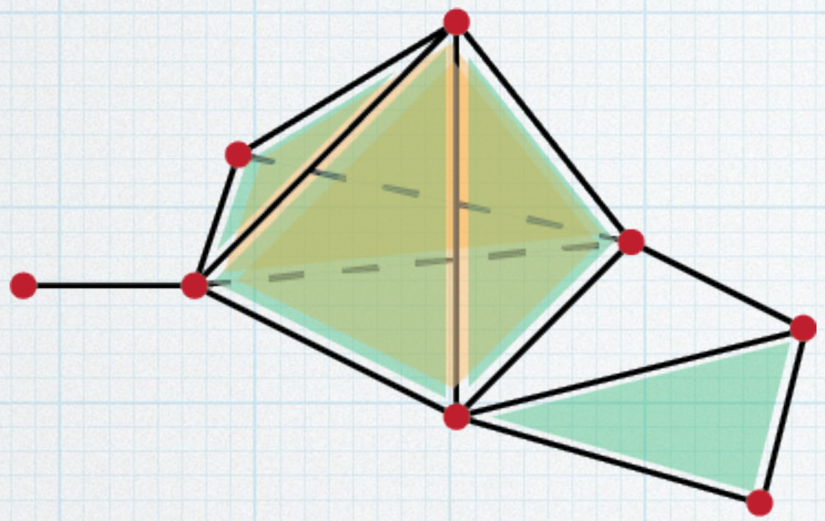
$\beta_1 = 5$

β_1 : nombre de tunnels



$\beta_2 = 1$

β_2 : nombre de cavités



Homologie algorithmique

$H_q(C)$???

Homologie algorithmique

$$\chi = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \beta_i$$

Que calculer ?

Homologie

Niveau 0 : Caractéristique d'Euler-Poincaré

Niveau 1 : Nombres de Betti

Niveau 2 : Décomposition en facteurs invariants

$\mathbb{Z}^{\beta_q} \times \mathbb{Z}/\lambda_1\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/\lambda_2\mathbb{Z} \times \cdots$

Niveau 3 : Facteurs invariants et générateurs

$$\mathbb{Z}[z_1] \times \cdots \times \mathbb{Z}[z_{b_q}] \times \mathbb{Z}/\lambda_1\mathbb{Z}[c_1] \times \mathbb{Z}/\lambda_2\mathbb{Z}[c_2] \times \cdots$$

Homologie algorithmique

Calcul de l'homologie

Forme normale de Smith

* Algébrique

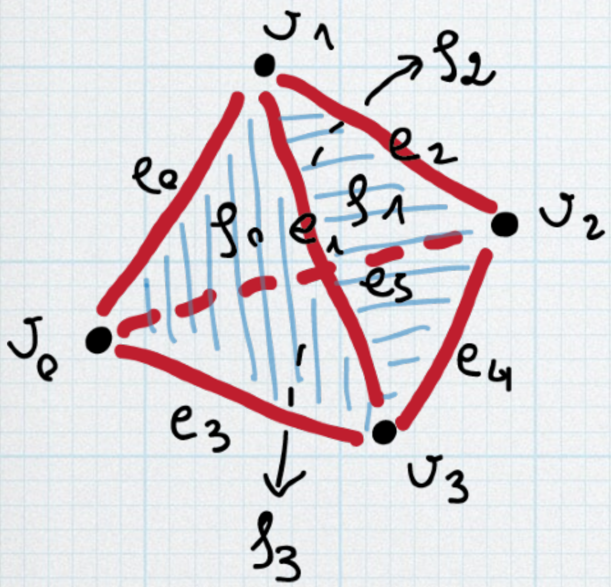
Homologie effective

Réduction

Théorie de Morse discrète

* Combinatoire
* Géométrique

Complexe de chaînes



Matrice de bord

	v_0	v_1	v_2	v_3	e_0	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	f_0	f_1	f_2	f_3
v_0					1			1		1				
v_1					-1	1	1							
v_2							-1		1	-1				
v_3						-1		-1	-1					
e_0											-1		-1	
e_1											-1	1		
e_2												-1	-1	
e_3											1			1
e_4												-1		-1
e_5													1	-1
f_0														
f_1														
f_2														
f_3														

Complexe cubique

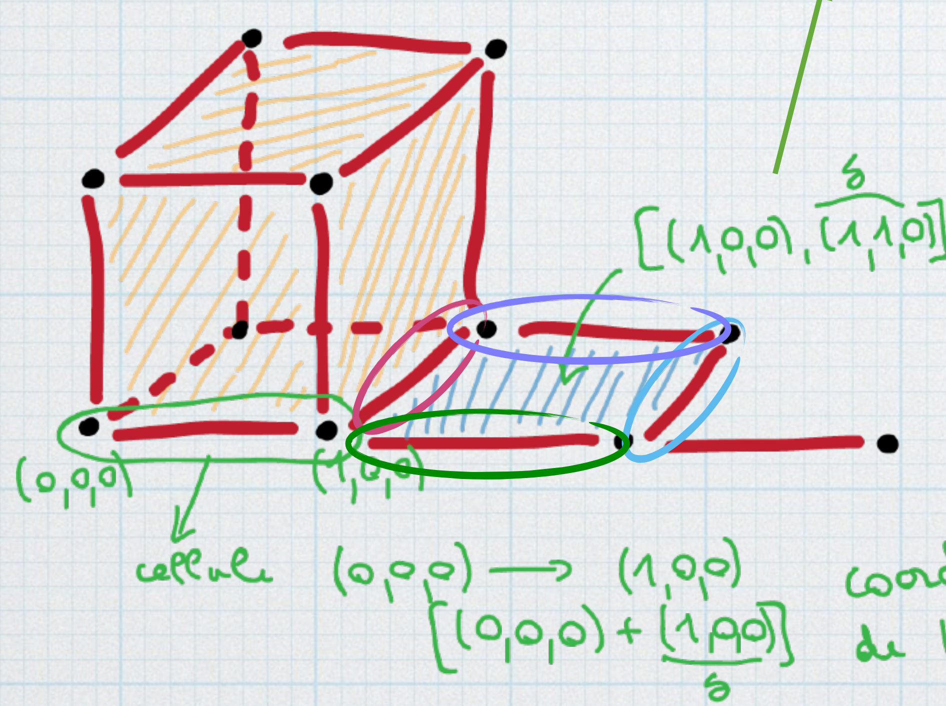
$$\partial_q([x,\delta]) = \sum_{i=1}^{n} -1^{o(i)} \left([x+\delta_i e_i, \delta - \delta_i e_i] - [x, \delta - \delta_i e_i] \right)$$

où $o(i)$ **désigne le nombre de 1 dans** $(\delta_1, \ldots, \delta_i)$

$$\partial[(1{,}0{,}0),(1{,}1{,}0)] =$$

$$-([(2{,}0{,}0),(0{,}1{,}0)] - [(1{,}0{,}0),(0{,}1{,}0)])$$

$$+([(1{,}1{,}0),(1{,}0{,}0)] - [(1{,}0{,}0),(1{,}0{,}0)])$$



coordonnées du Khalimsky

Forme Normale de Smith

<u>**Théorème**</u>

Soit $M \in \mathscr{M}_{m\times n}(\mathbb{Z})$

Il existe U, V **deux matrices inversibles telles que :**

$$UMV = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} b_1 & & & 0 \\ & b_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & b_l \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \qquad b_i \mid b_{i+1}$$

Forme Normale de Smith

Théorème

Soit $M \in \mathscr{M}_{m \times n}(\mathbb{Z})$

Il existe U, V deux matrices inversibles telles que :

$$UMV = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

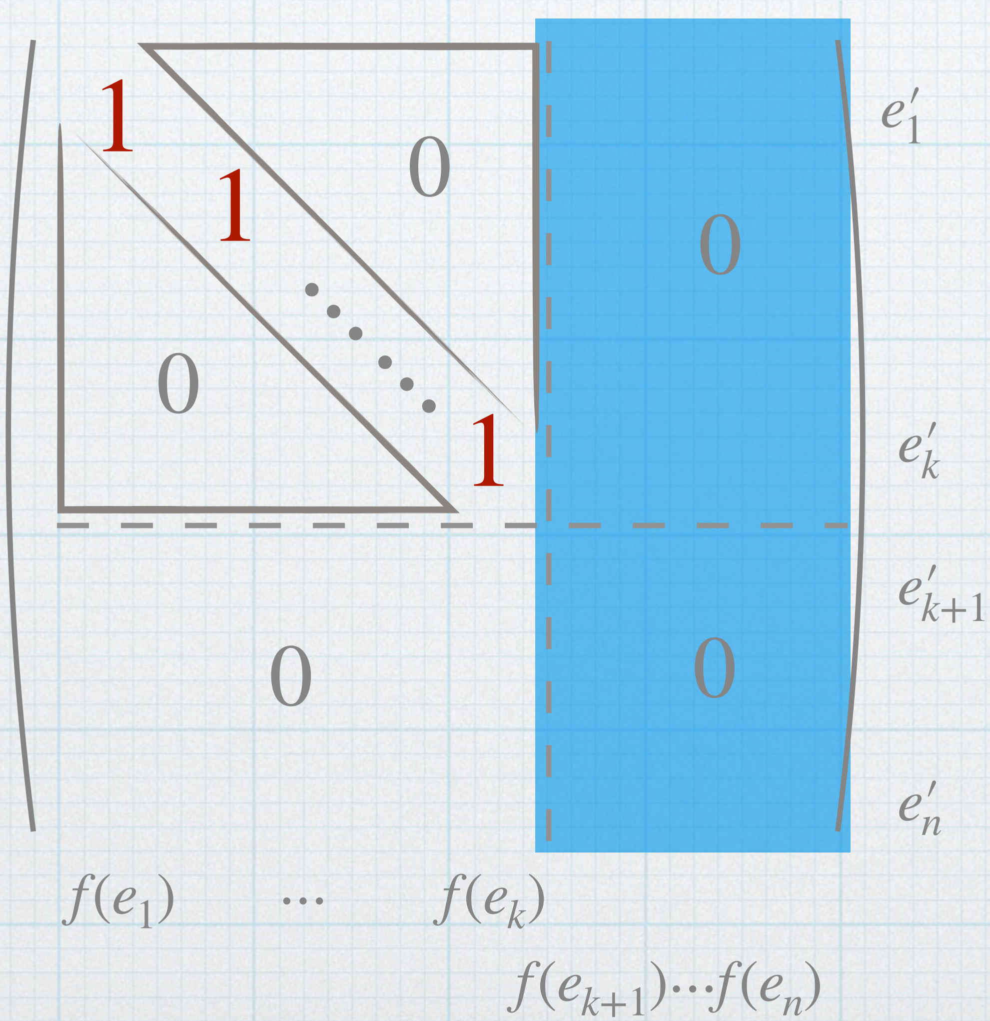
Si A est un corps

Forme Normale de Smith

<u>Théorème</u>

Il existe $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ deux bases telles que :

$\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\partial_q) \sim$



$\mathscr{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$
$\mathscr{C} = \{e'_1, \ldots, e'_m\}$

$H_q(C) =$
$\ker(\partial_q)/\mathrm{Im}\,(\partial_{q+1})$

$\ker(\partial_q)$

Forme Normale de Smith

<u>Théorème</u>

Il existe $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ deux bases telles que :

$$\mathscr{B} = \{e_1, \dots, e_n\}$$
$$\mathscr{C} = \{e'_1, \dots, e'_m\}$$

$$\mathscr{M}_{\mathscr{B},\mathscr{C}}(\partial_q) \sim \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0 \\ 0 & & 1 & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} e'_1 \\ e'_k \\ e'_{k+1} \\ e'_n \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_k) \end{array} & f(e_{k+1})\cdots f(e_n) & \end{array}$$

$$H_q(C) = \ker(\partial_q)/\mathrm{Im}\,(\partial_{q+1})$$

$$\mathrm{Im}(\partial_q) = \mathrm{rang}(\partial_q)$$

Forme Normale de Smith

Si A est un anneau

Théorème

Il existe $\mathscr{B}, \mathscr{C}$ deux bases telles que :

Bord faible

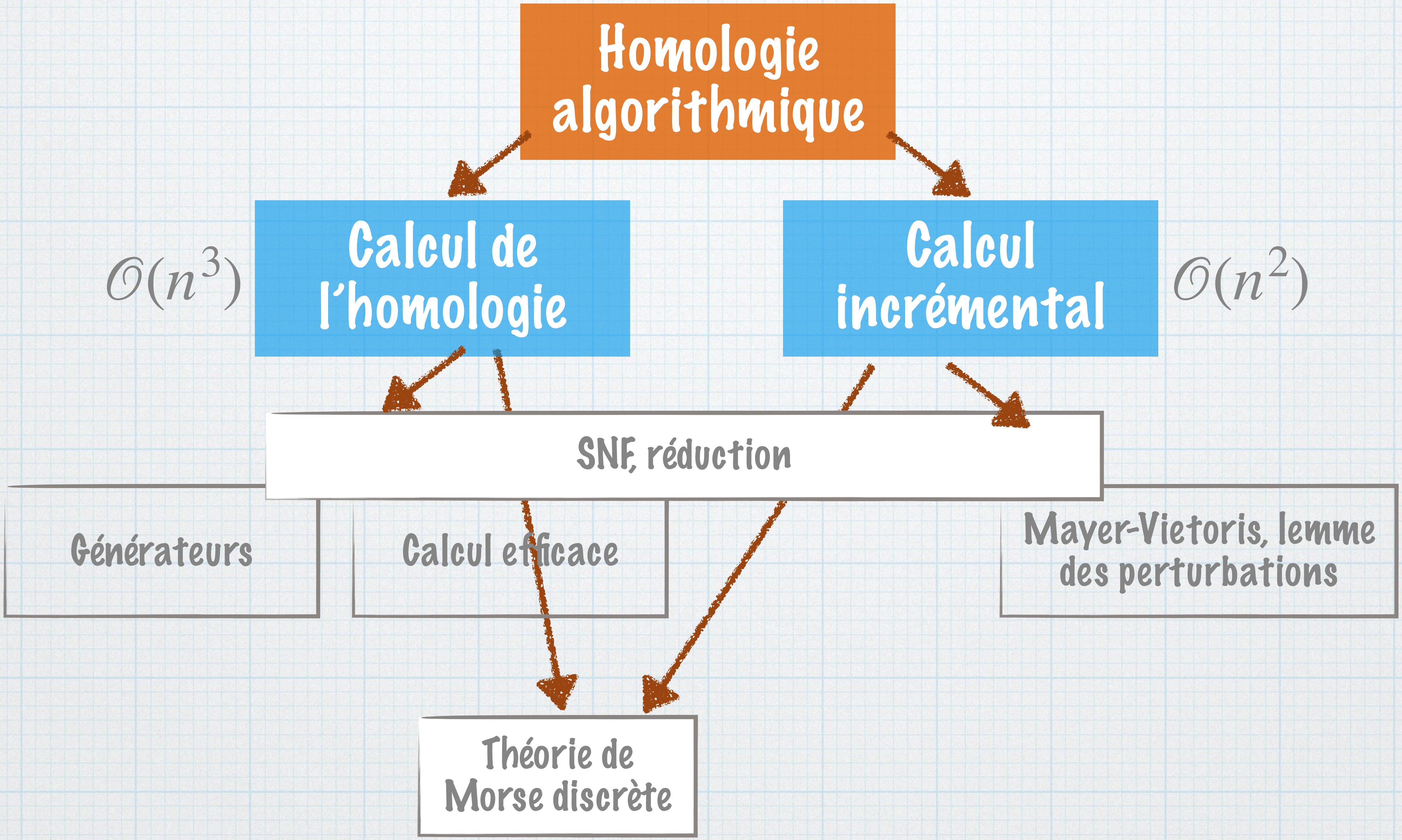
$$UAV = \begin{array}{cc} \left(\begin{array}{ccc|c} b_1 & & 0 & \\ & b_2 & & 0 \\ 0 & & \ddots \; b_l & \\ \hline & 0 & & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{c} e'_1 \\ \vdots \\ e'_k \\ e'_{k+1} \\ e'_n \end{array} \\ \begin{array}{ccc} f(e_1) & \cdots & f(e_k) \end{array} \; f(e_{k+1})\cdots f(e_n) & \end{array}$$

Base :

$\{b_1e'_1, \dots, b_ke'_k\}$

$\mathrm{Im}(\partial_q)$

$b_i \mid b_{i+1}$

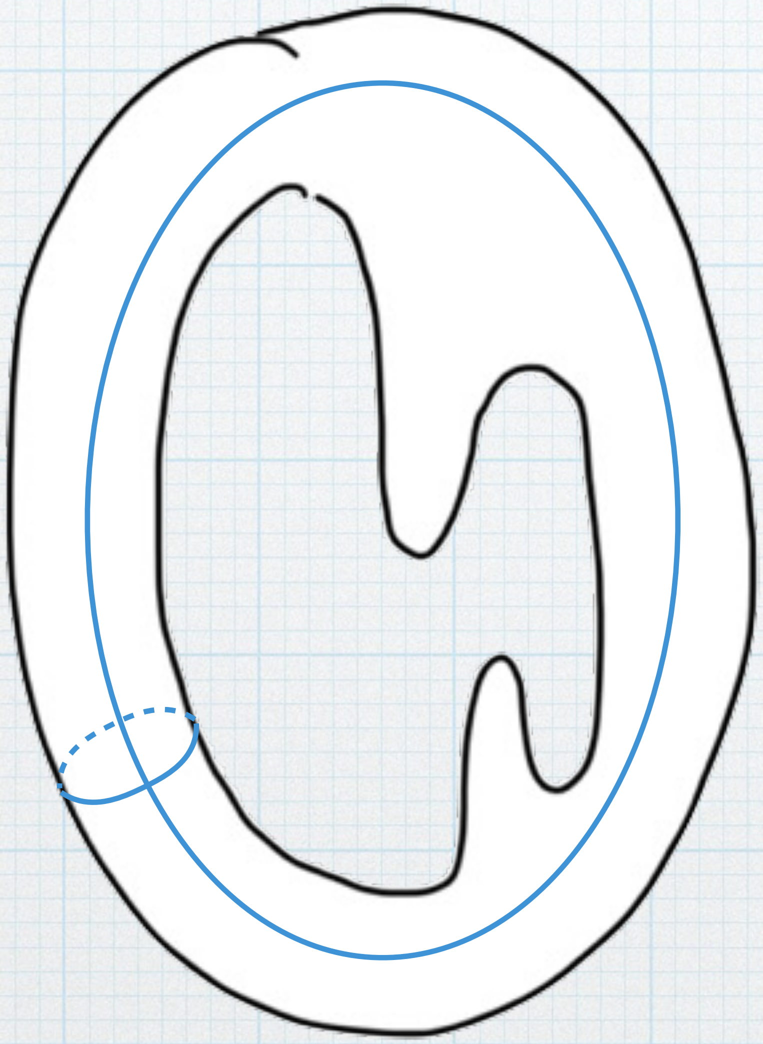

Homologie algorithmique
$\mathcal{O}(n^3)$
Calcul de l'homologie
Calcul incrémental
$\mathcal{O}(n^2)$
SNF, réduction
Générateurs
Calcul efficace
Mayer-Vietoris, lemme des perturbations
Théorie de Morse discrète

Homologie persistante

* Introduite indépendamment [2008-2011]
  * Frosini et Ferri (Bologne, Italie),
  * Robins (Colorado, USA)
  * Edelsbrunner (Caroline du Nord, USA)

Homologie persistante

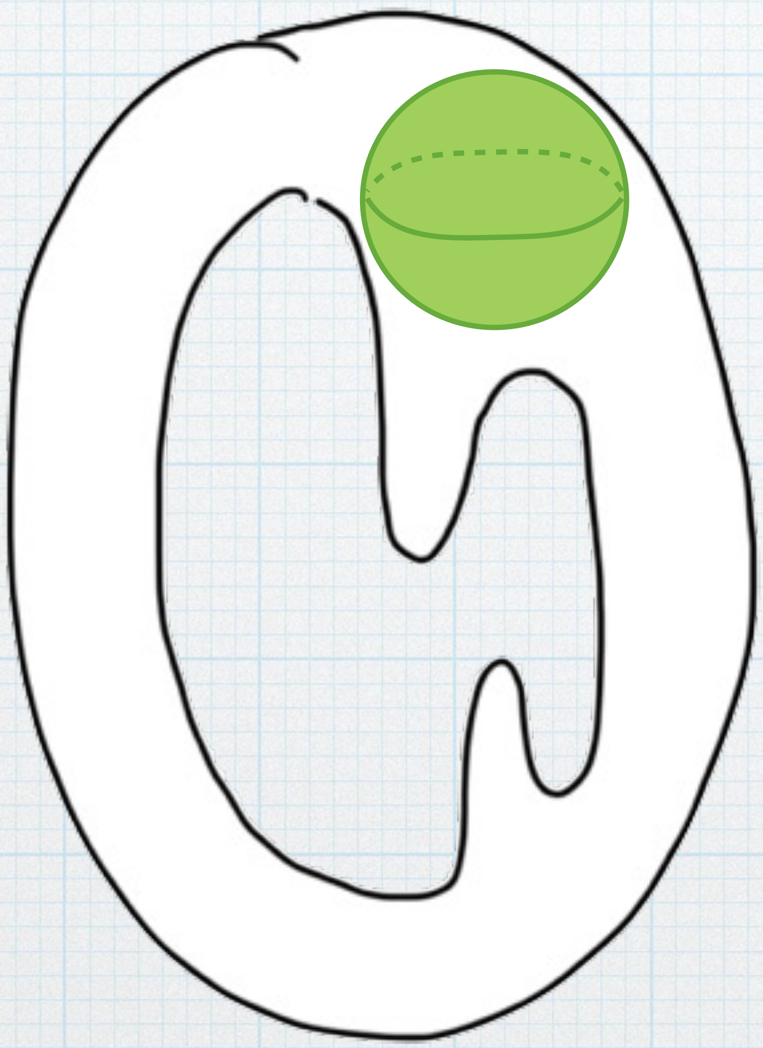
$\beta_0 = 1$
$\beta_1 = 2$
$\beta_2 = 1$



$\mathcal{M}$

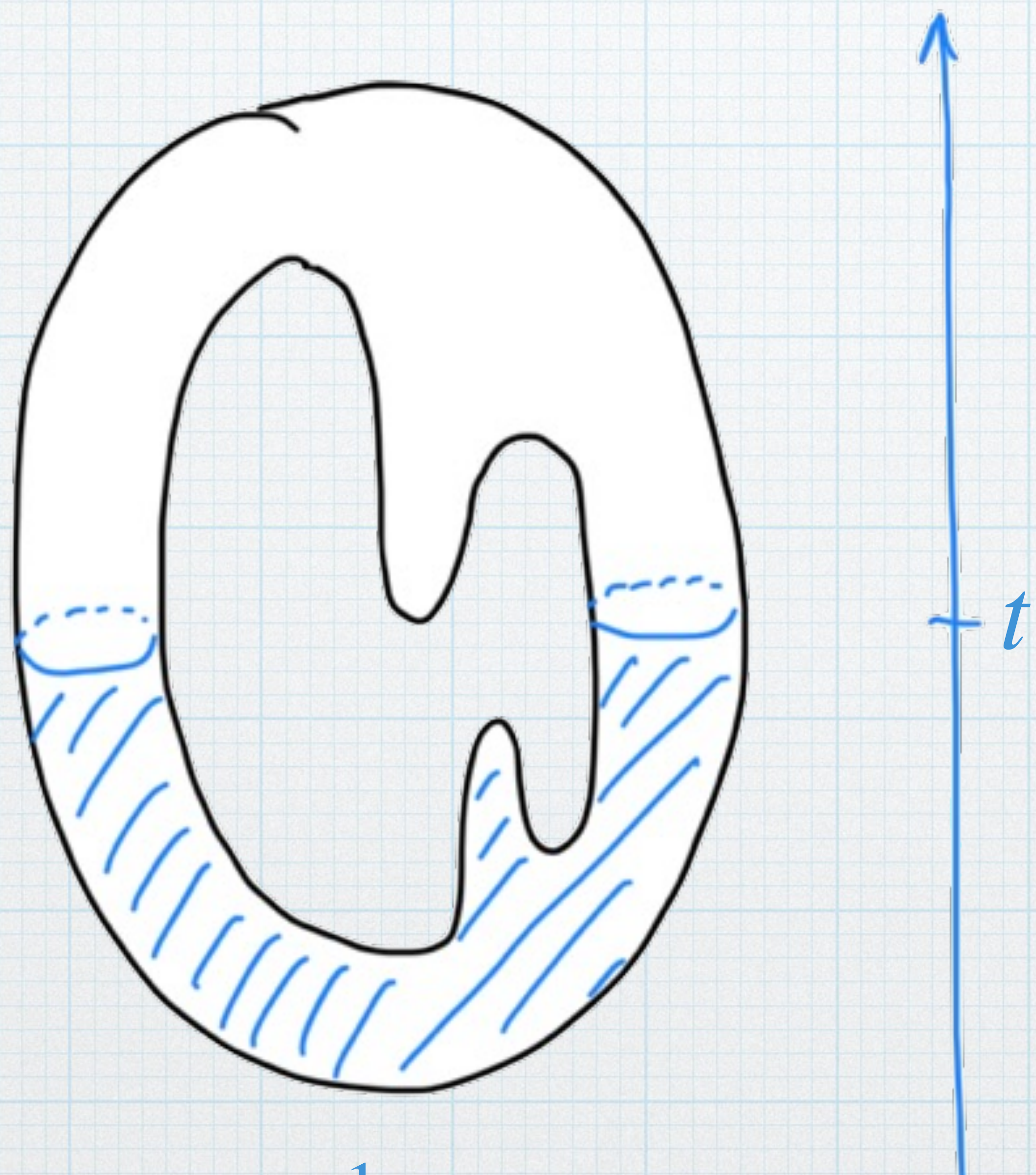
Homologie persistante

$\beta_0 = 1$
$\beta_1 = 2$
$\beta_2 = 1$



$\mathcal{M}$

Homologie persistante



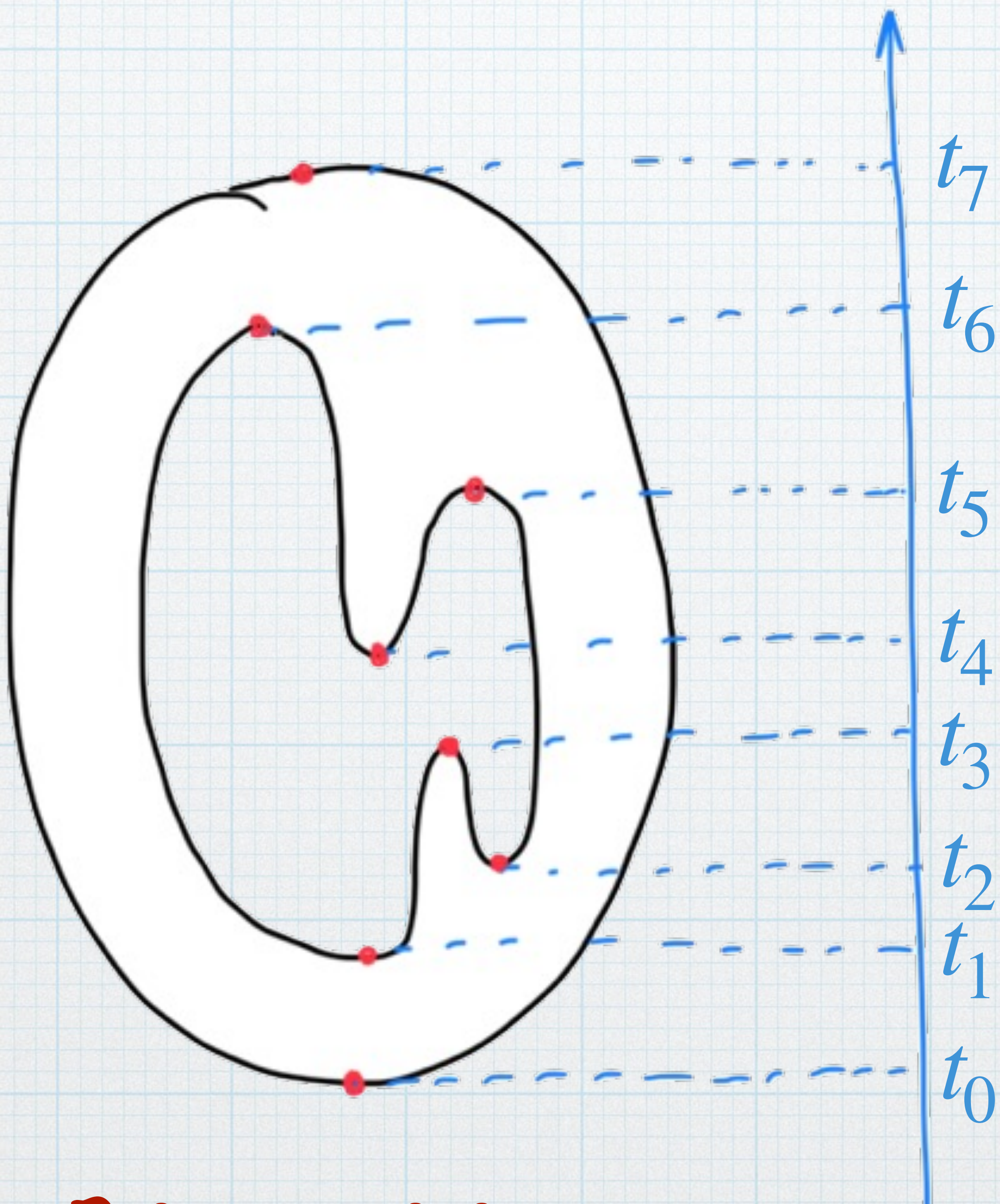
$f\,:\,\mathscr{M} \to \mathbb{R}$

Tame function :

- **Nombre fini de valeurs critiques**
- $\forall k, t \quad H_k(\mathscr{M}_t)$ **de dim finie**

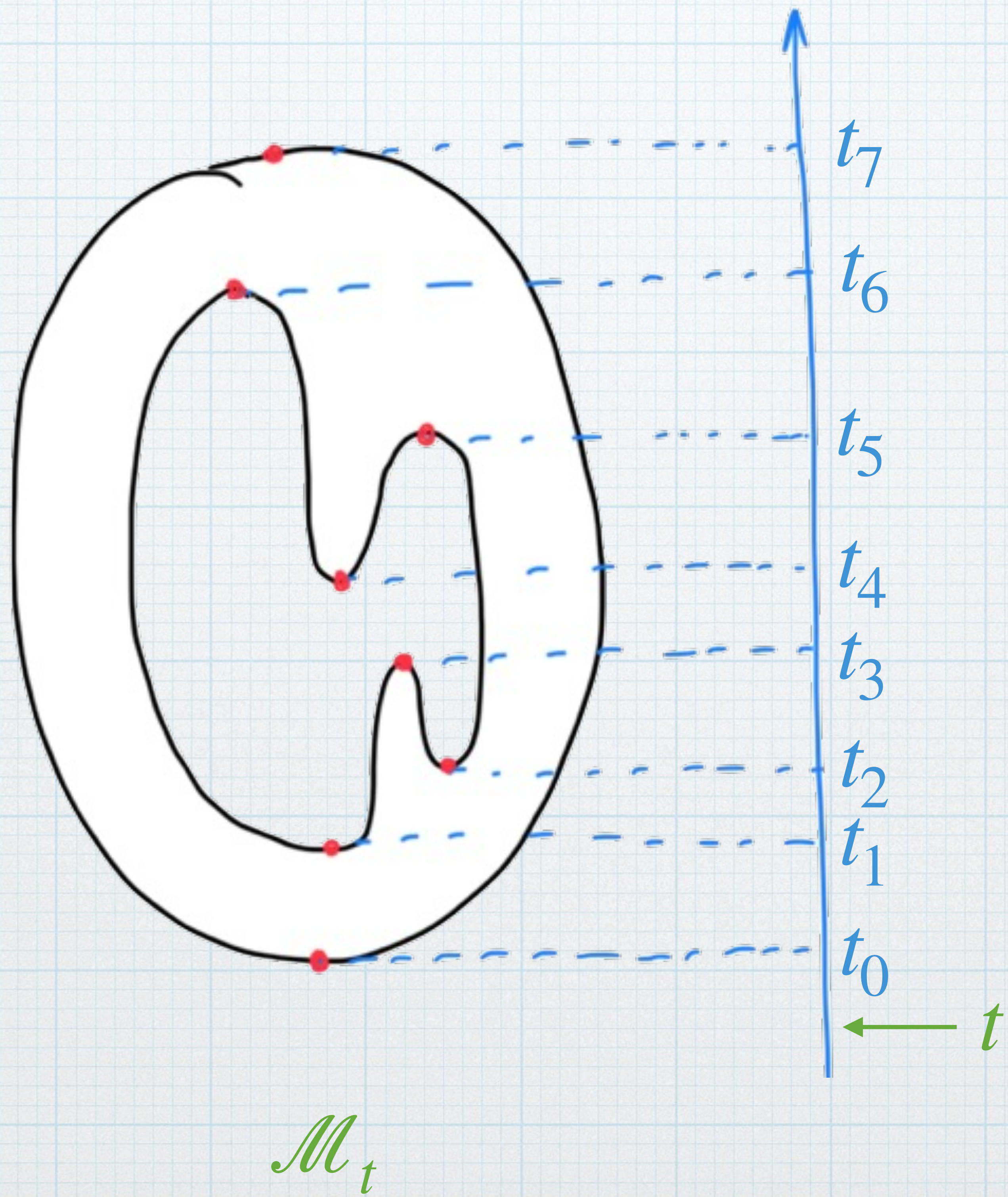
$$\mathscr{M}_t = f^{-1}(]-\infty, t])$$

Homologie persistante



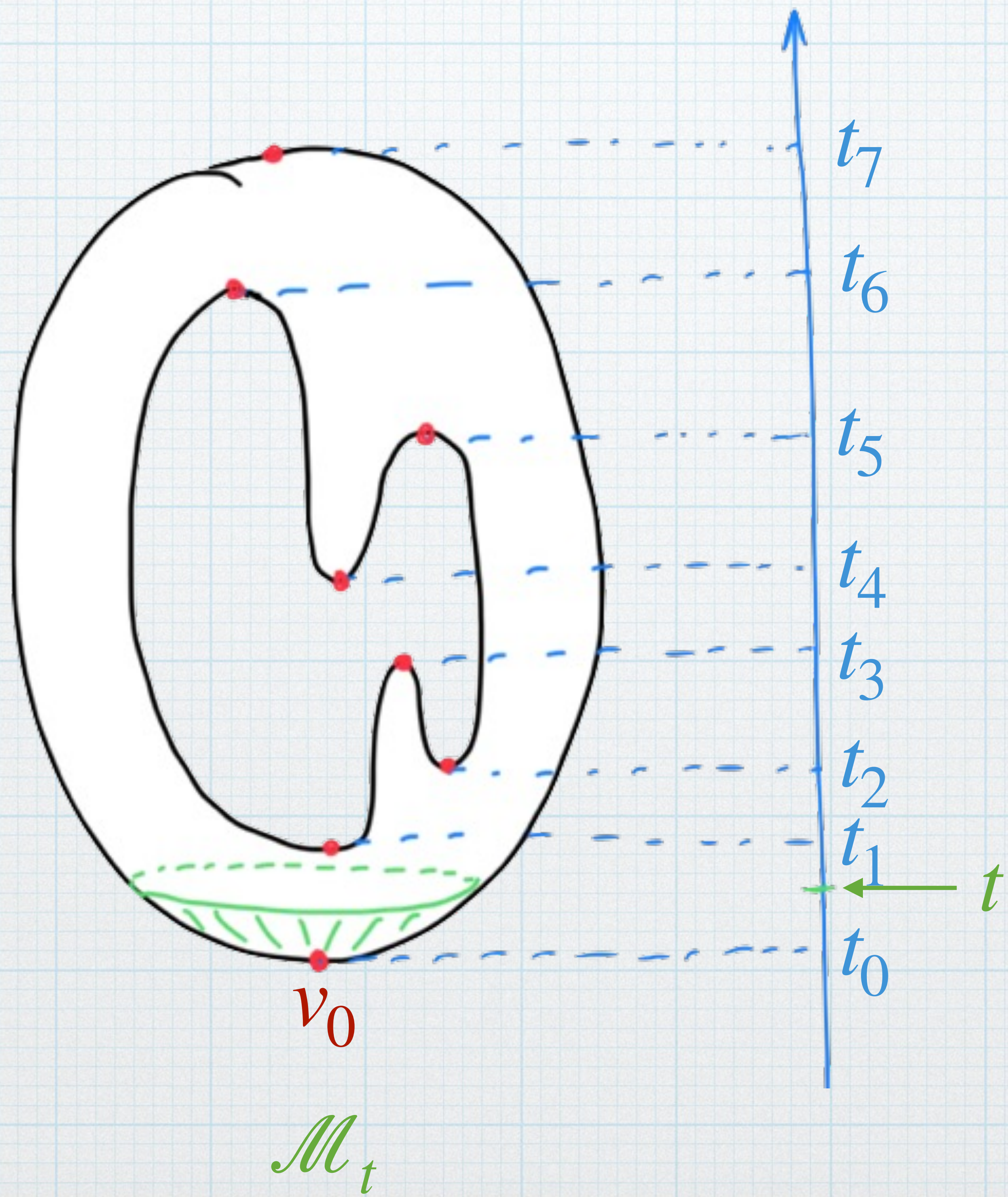
Points critiques

Homologie persistante



$$\beta_0^t = 0$$
$$\beta_1^t = 0$$
$$\beta_2^t = 0$$

Homologie persistante



$v_0 \;:\; t_0 \to \cdots$

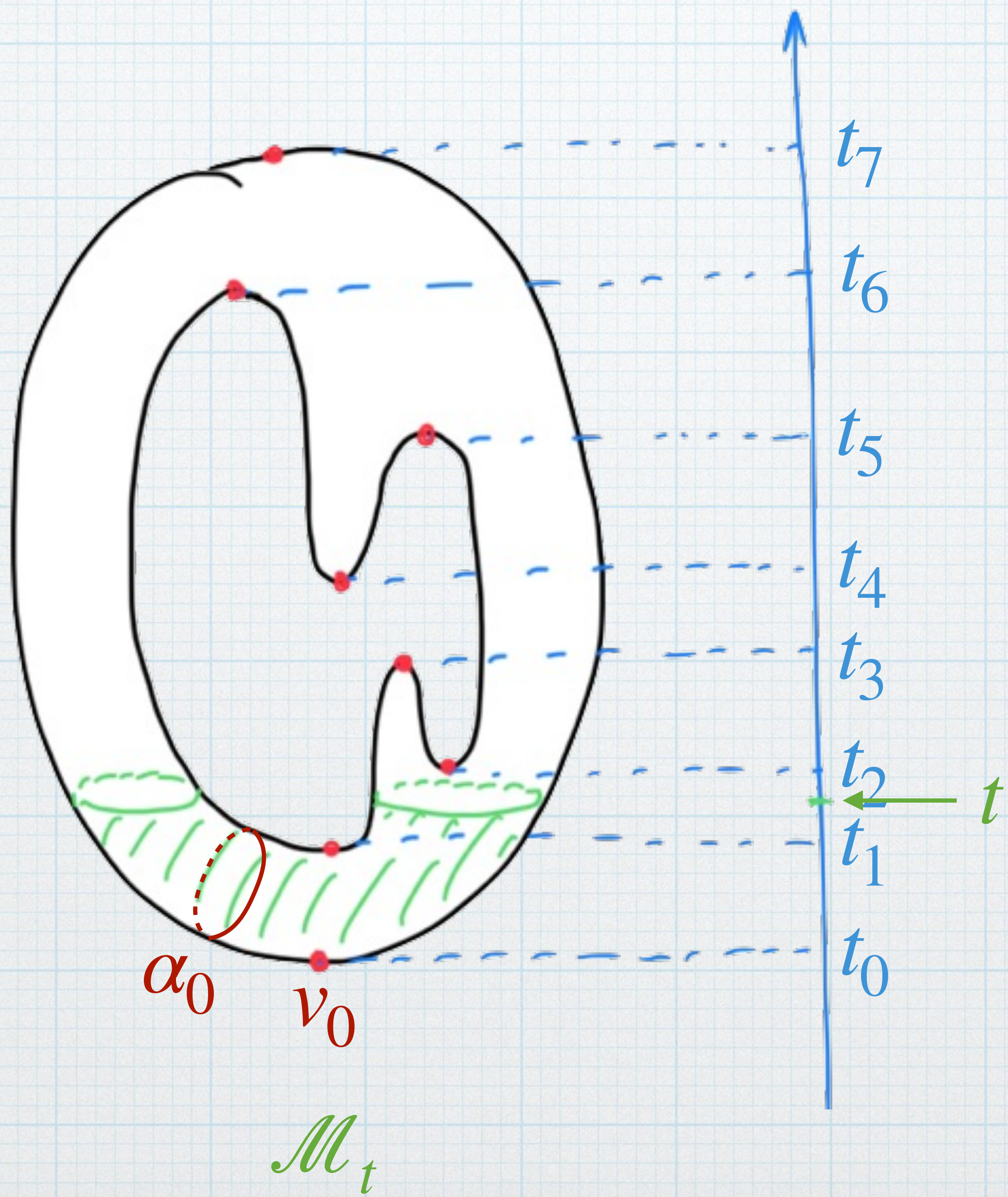
Dim 0

Dim 1

Dim 2

$\beta_0^t = 1$
$\beta_1^t = 0$
$\beta_2^t = 0$

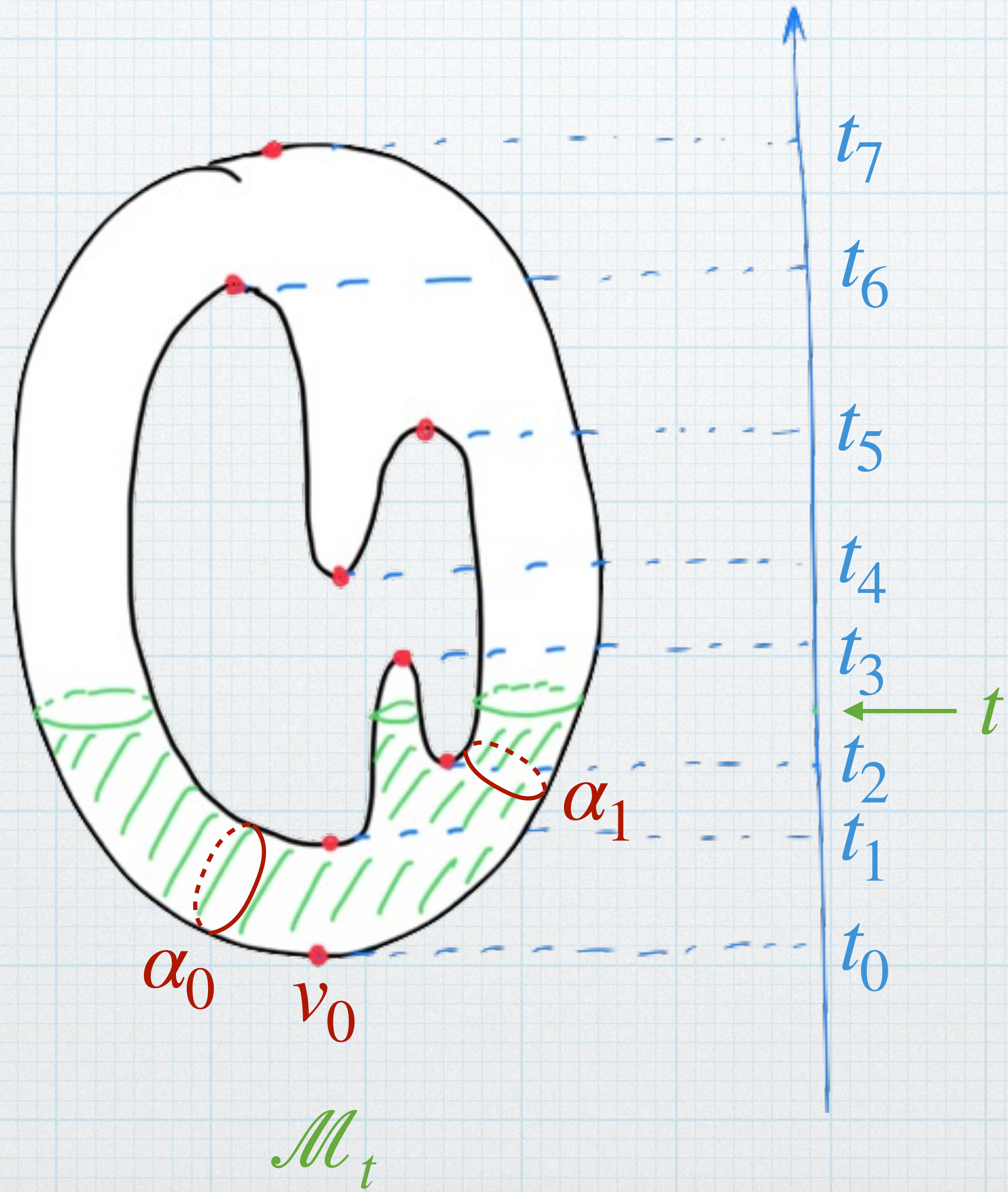
Homologie persistante



$\beta_0^t = 1$
$\beta_1^t = 1$
$\beta_2^t = 0$

$v_0 \; : \; t_0 \rightarrow \cdots$	Dim 0
$\alpha_0 \; : \; t_1 \rightarrow \cdots$	Dim 1
	Dim 2

Homologie persistante



$\beta_0^t = 1$
$\beta_1^t = 2$
$\beta_2^t = 0$

Dim 0

$v_0 \; : \; t_0 \rightarrow \cdots$

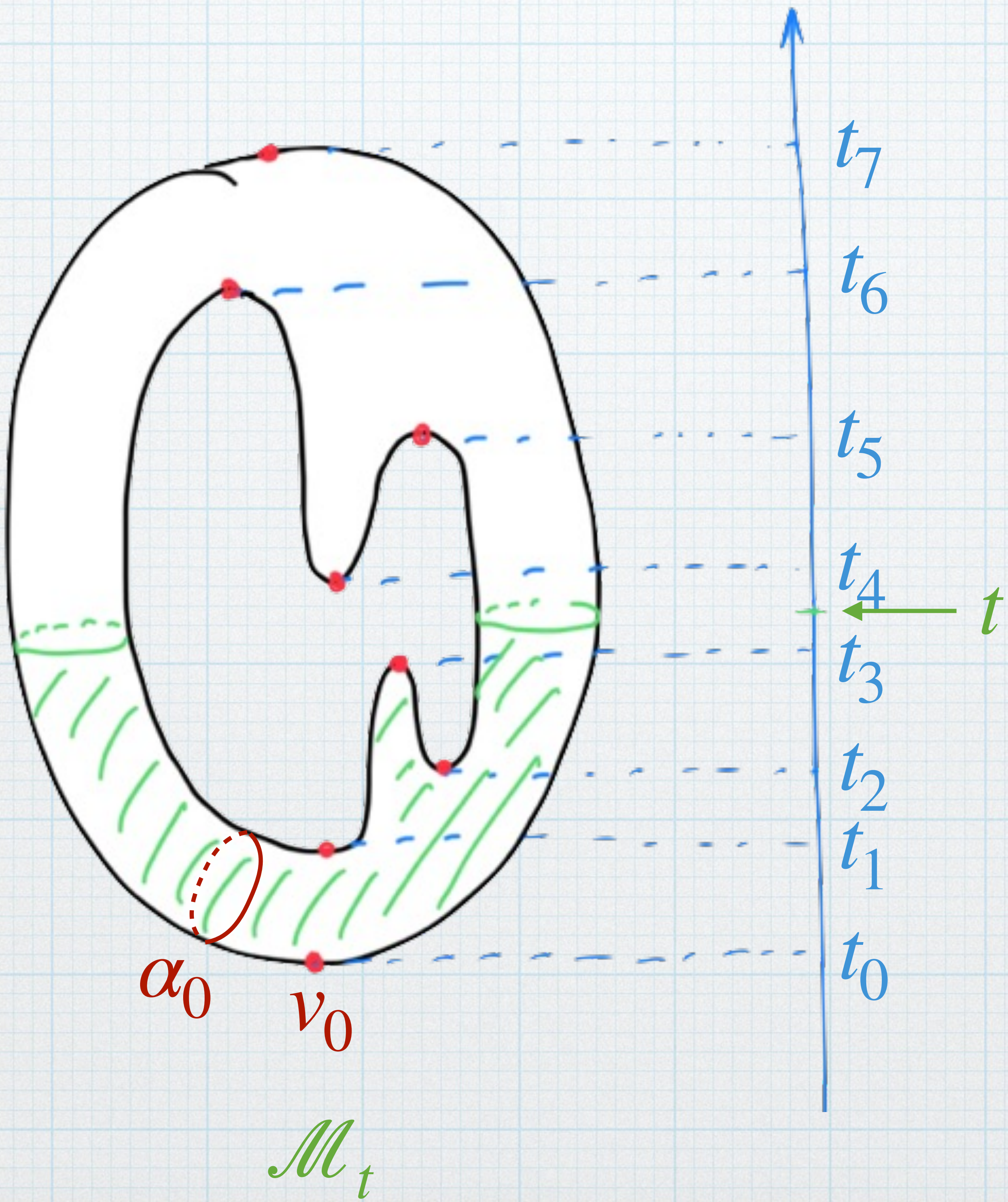
Dim 1

$\alpha_0 \; : \; t_1 \rightarrow \cdots$

$\alpha_1 \; : \; t_2 \rightarrow \cdots$

Dim 2

Homologie persistante



$\beta_0^t = 1$
$\beta_1^t = 1$
$\beta_2^t = 0$

Dim 0

$v_0 \; : \; t_0 \rightarrow \cdots$

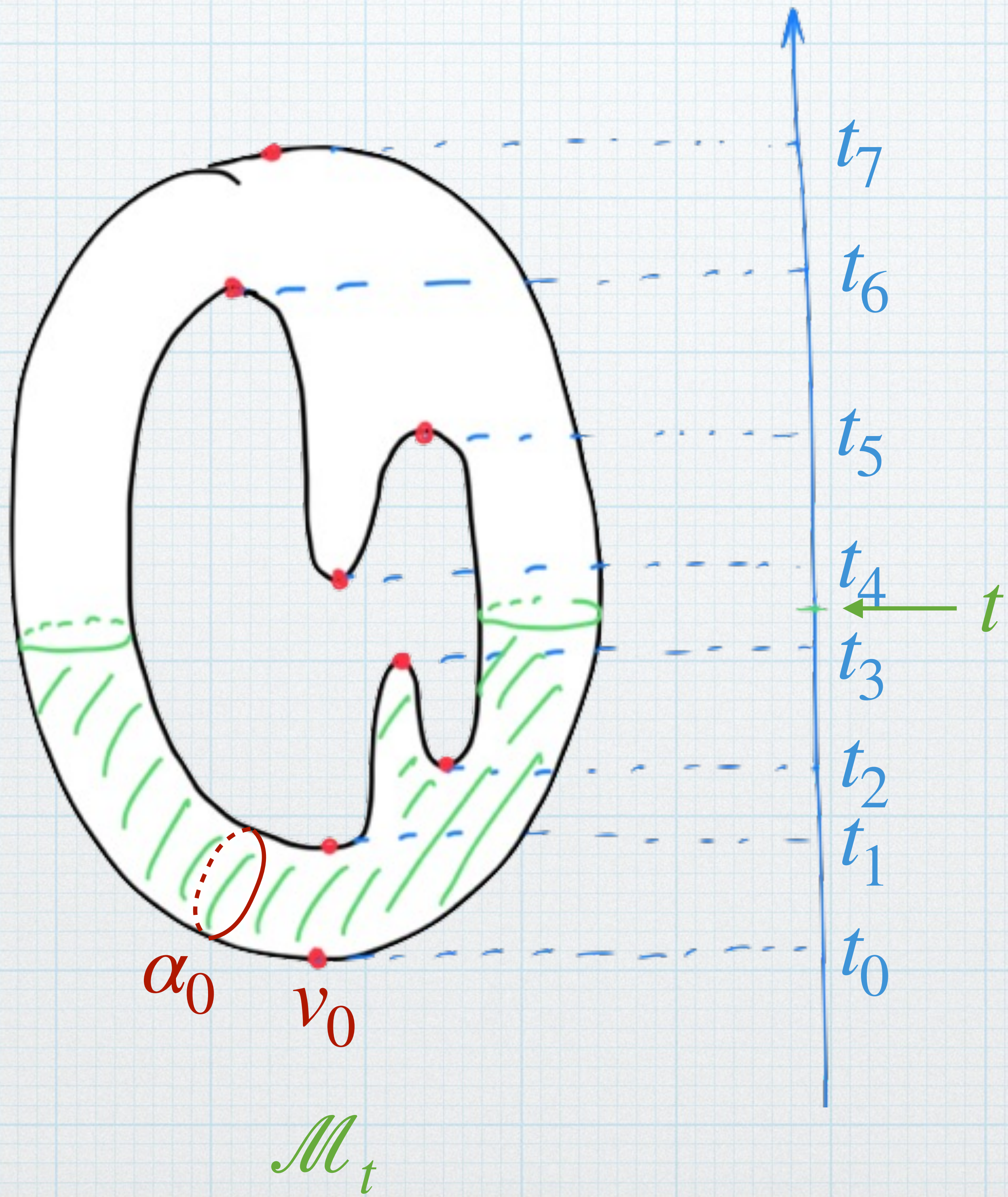
Dim 1

$\alpha_0 \; : \; t_1 \rightarrow \cdots$
$\alpha_1 \; : \; t_2 \rightarrow \cdots$

Fusion

Dim 2

Homologie persistante



$\beta_0^t = 1$
$\beta_1^t = 1$
$\beta_2^t = 0$

Dim 0

$v_0 \ : \ t_0 \rightarrow \cdots$

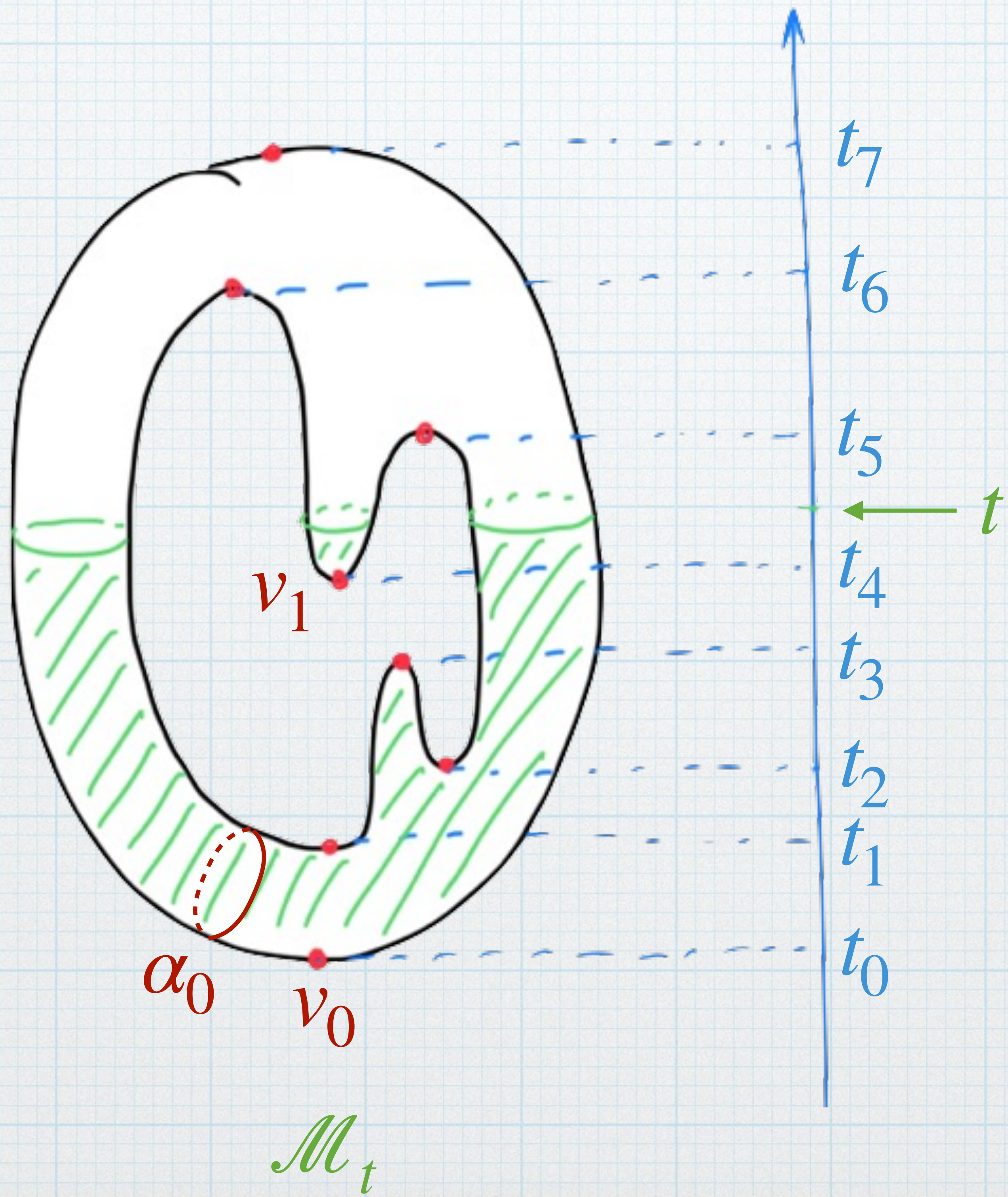
Dim 1

$\alpha_0 \ : \ t_1 \rightarrow \cdots$

$\alpha_1 \ : \ t_2 \rightarrow t_3$

Dim 2

Homologie persistante



$$\beta_0^t = 2$$
$$\beta_1^t = 1$$
$$\beta_2^t = 0$$

Dim 0

$v_0 \ : \ t_0 \rightarrow \cdots$

$v_1 \ : \ t_4 \rightarrow \cdots$

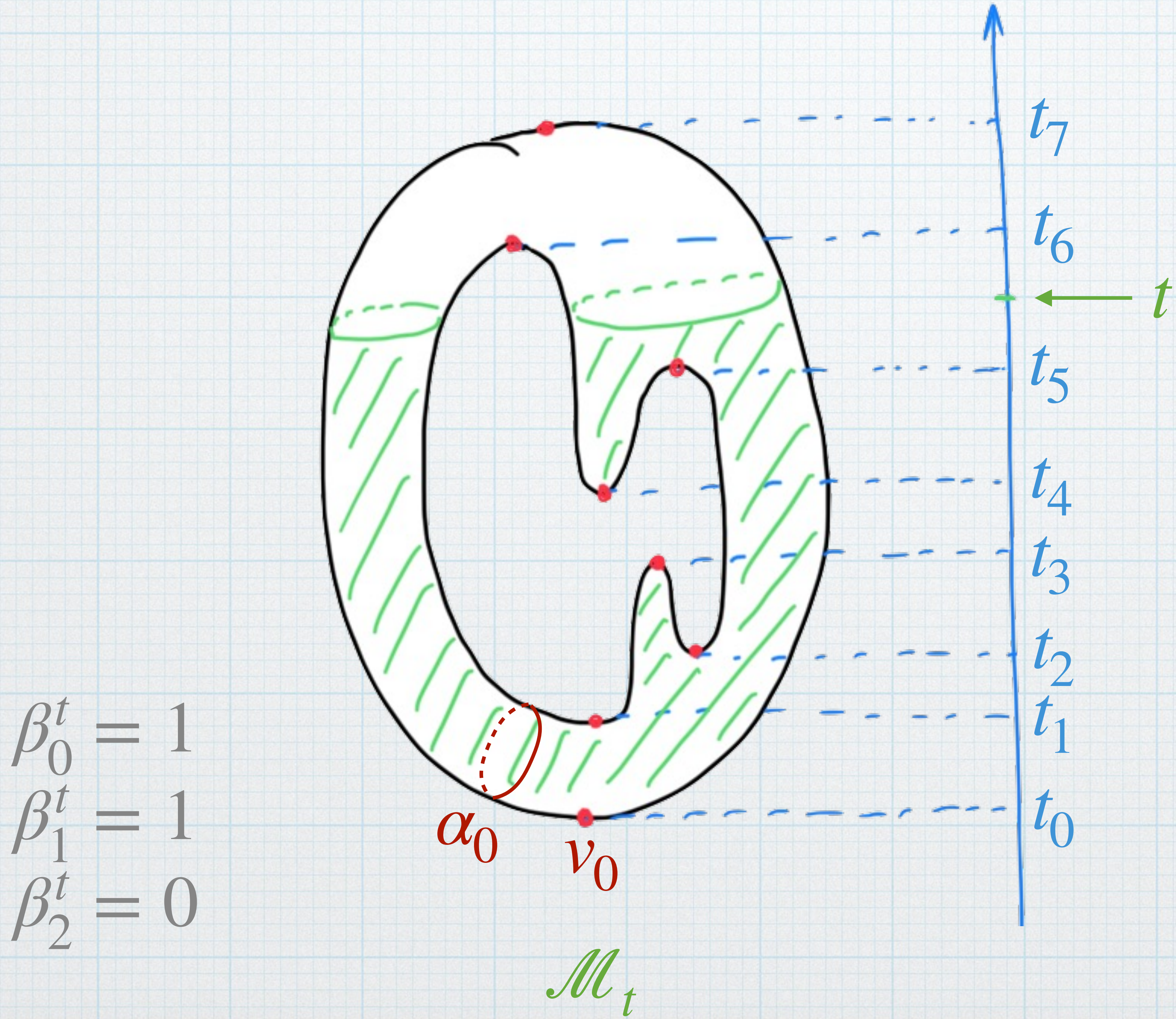
Dim 1

$\alpha_0 \ : \ t_1 \rightarrow \cdots$

$\alpha_1 \ : \ t_2 \rightarrow t_3$

Dim 2

Homologie persistante



Dim 0

$v_0 \ : \ t_0 \rightarrow \cdots$

$v_1 \ : \ t_4 \rightarrow \cdots$

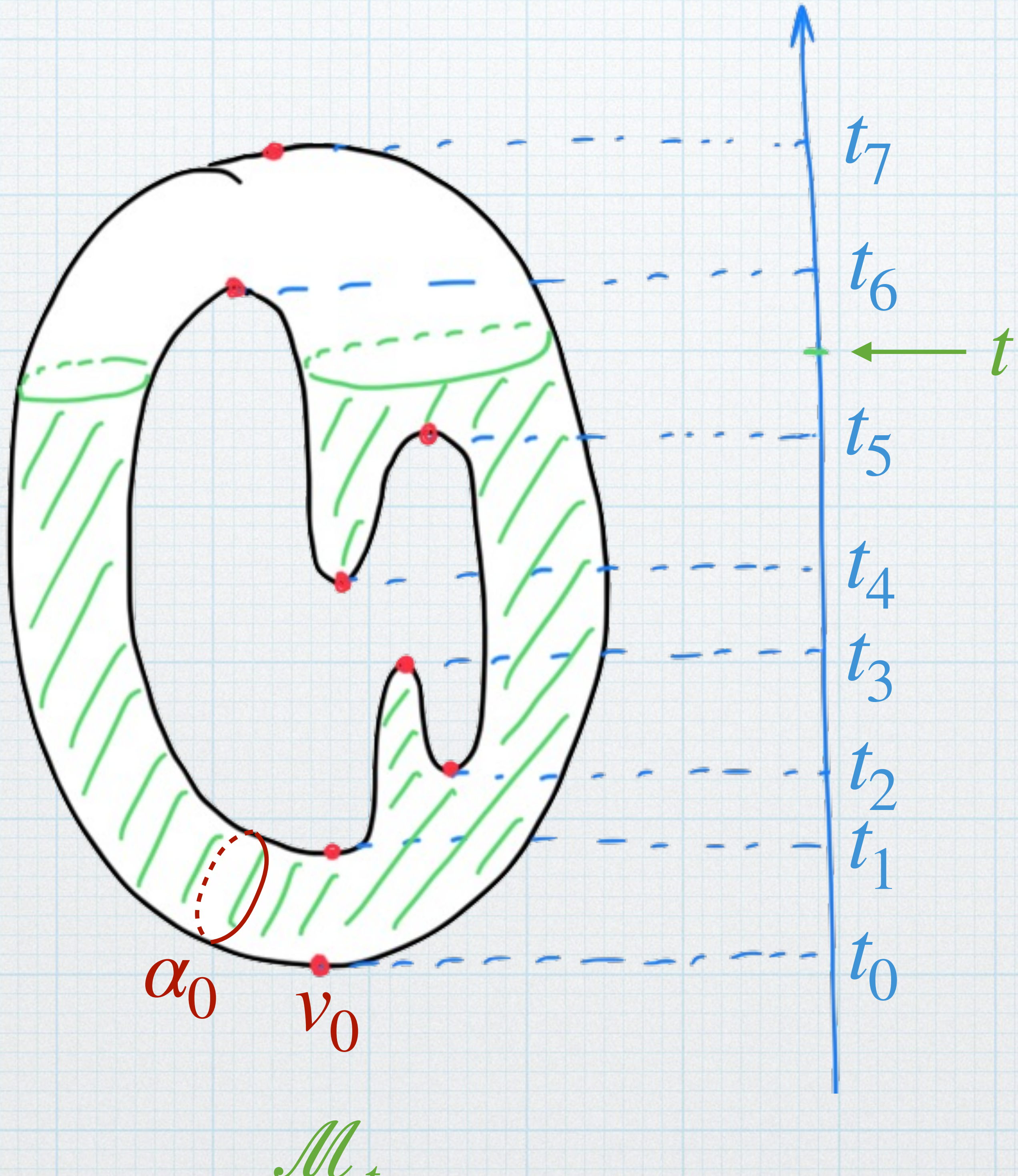
Dim 1

$\alpha_0 \ : \ t_1 \rightarrow \cdots$

$\alpha_1 \ : \ t_2 \rightarrow t_3$

Dim 2

Homologie persistante



Dim 0

$v_0 \ : \ t_0 \rightarrow \cdots$

$v_1 \ : \ t_4 \rightarrow t_5$

Dim 1

$\alpha_0 \ : \ t_1 \rightarrow \cdots$

$\alpha_1 \ : \ t_2 \rightarrow t_3$

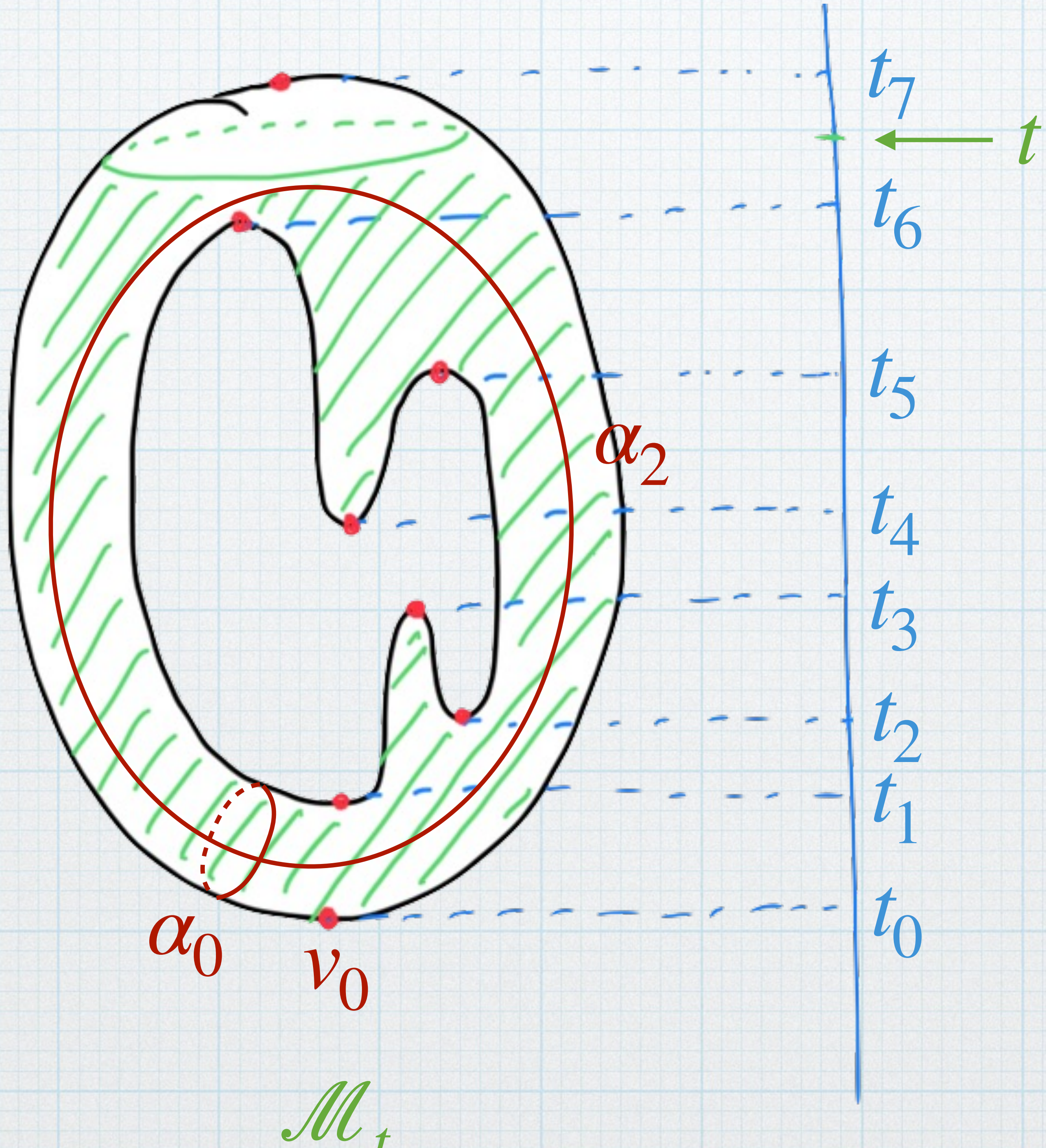
Dim 2

$\beta_0^t = 1$

$\beta_1^t = 1$

$\beta_2^t = 0$

Homologie persistante



Dim 0

$v_0 \; : \; t_0 \rightarrow \cdots$

$v_1 \; : \; t_4 \rightarrow t_5$

Dim 1

$\alpha_0 \; : \; t_1 \rightarrow \cdots$

$\alpha_1 \; : \; t_2 \rightarrow t_3$

$\alpha_2 \; : \; t_6 \rightarrow \cdots$

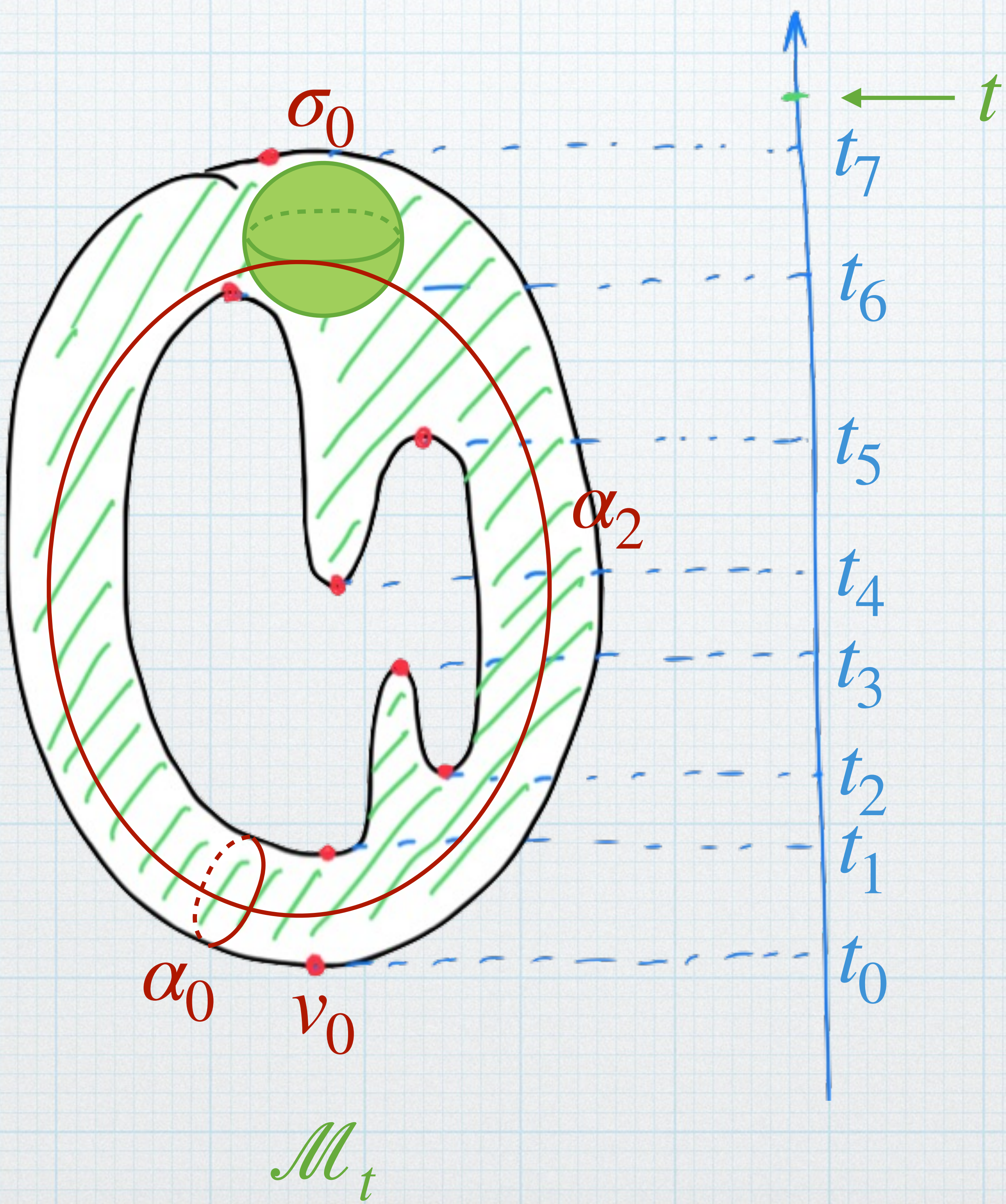
Dim 2

$\beta_0^t = 1$

$\beta_1^t = 2$

$\beta_2^t = 0$

Homologie persistante



$\beta_0^t = 1$
$\beta_1^t = 2$
$\beta_2^t = 1$

Dim 0

$v_0 \;:\; t_0 \rightarrow \cdots$
$v_1 \;:\; t_4 \rightarrow t_5$

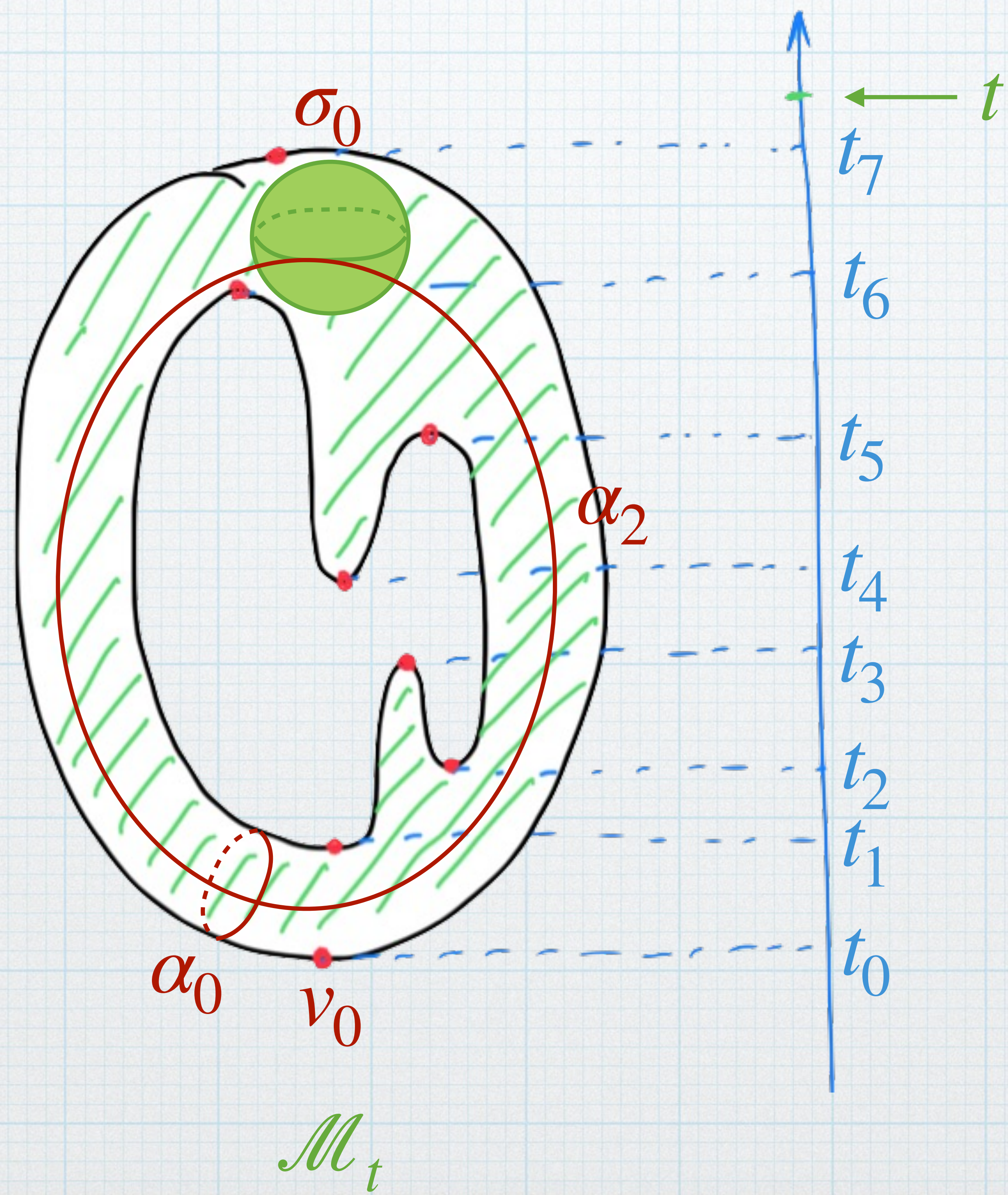
Dim 1

$\alpha_0 \;:\; t_1 \rightarrow \cdots$
$\alpha_1 \;:\; t_2 \rightarrow t_3$
$\alpha_2 \;:\; t_6 \rightarrow \cdots$

Dim 2

$\sigma_0 \;:\; t_7 \rightarrow \cdots$

Homologie persistante



$\beta_0^t = 1$
$\beta_1^t = 2$
$\beta_2^t = 1$

Dim 0

$v_0 : t_0 \to \infty$
$v_1 : t_4 \to t_5$

Dim 1

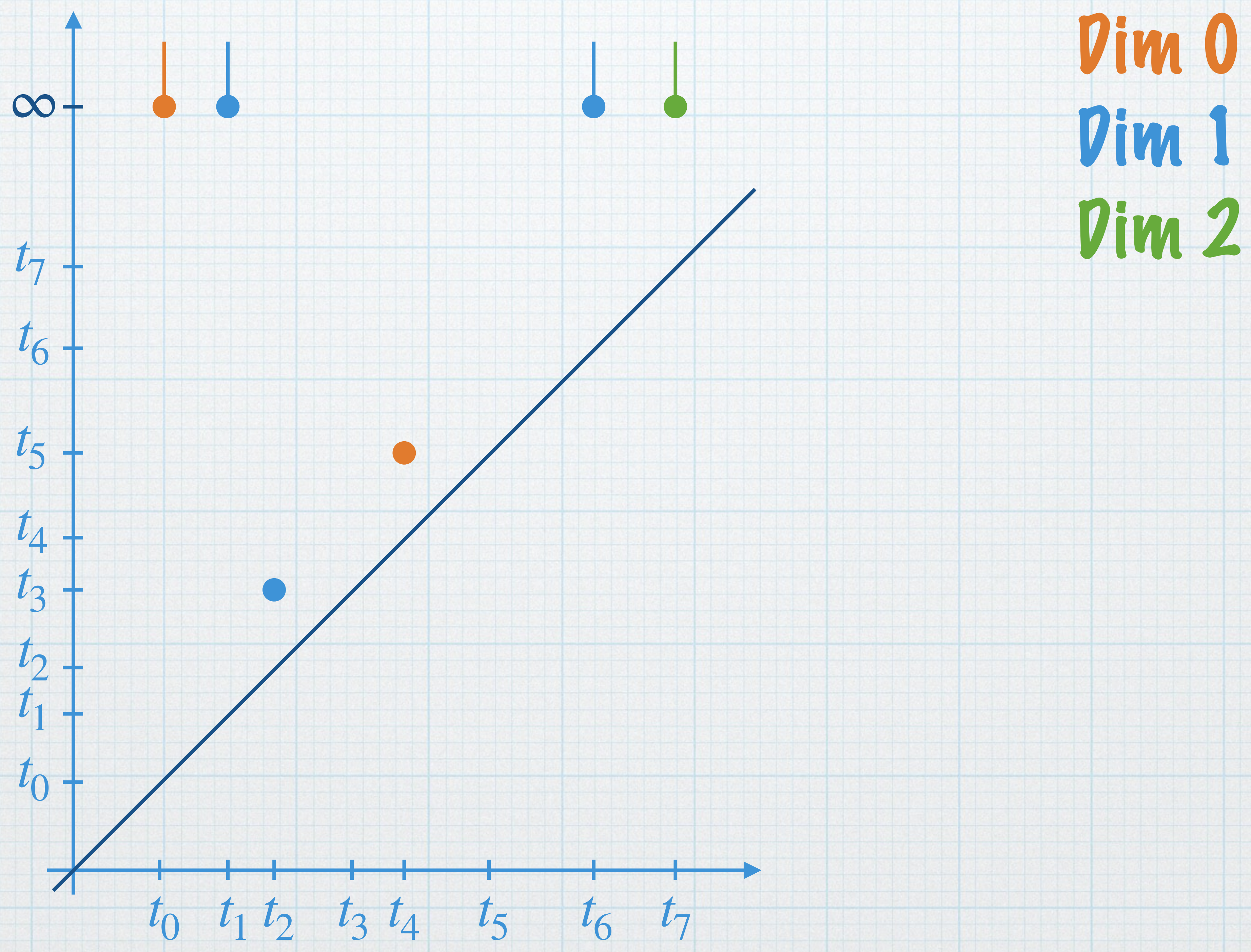
$\alpha_0 : t_1 \to \infty$
$\alpha_1 : t_2 \to t_3$
$\alpha_2 : t_6 \to \infty$

Dim 2

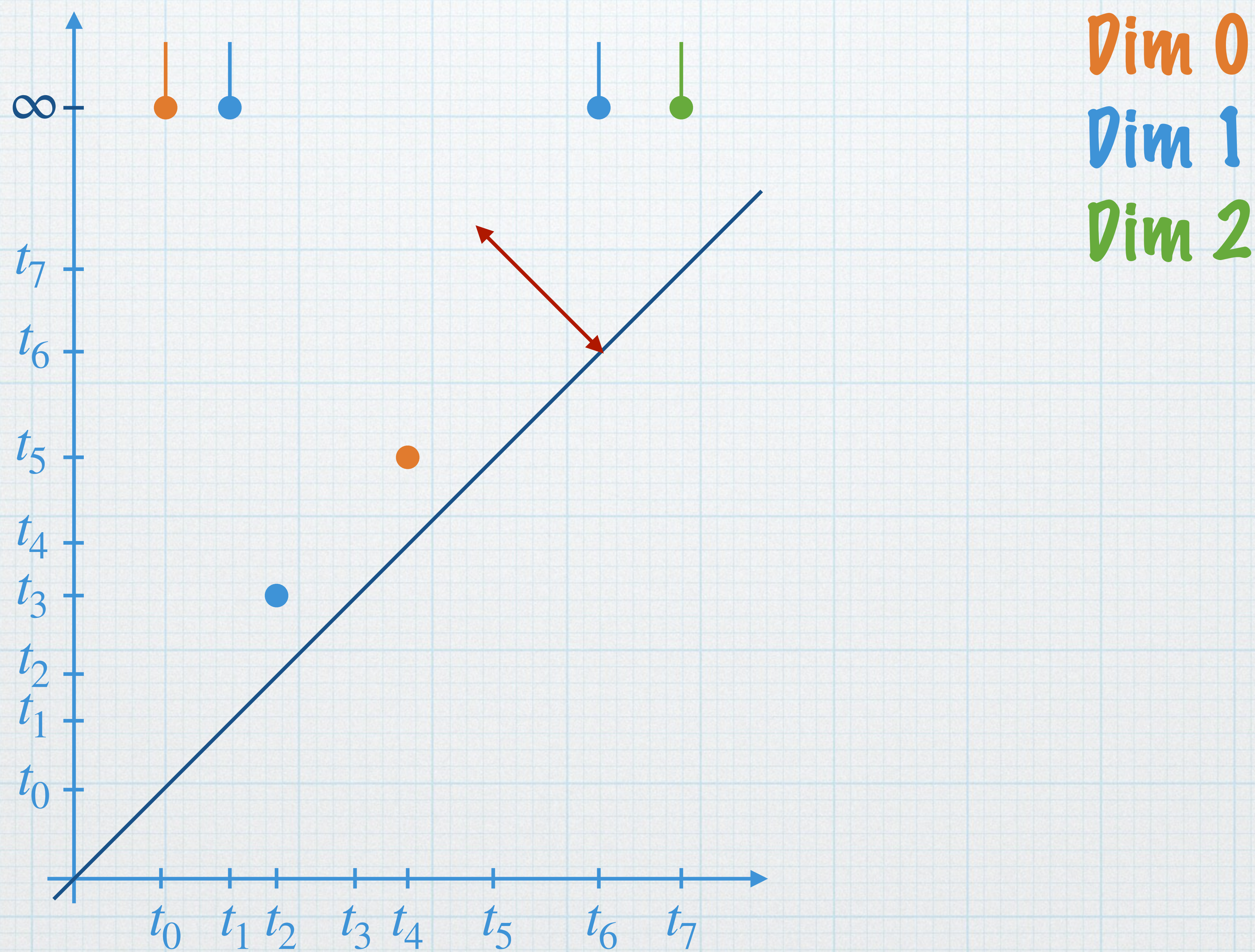
$\sigma_0 : t_7 \to \infty$

Intervalles de persistance

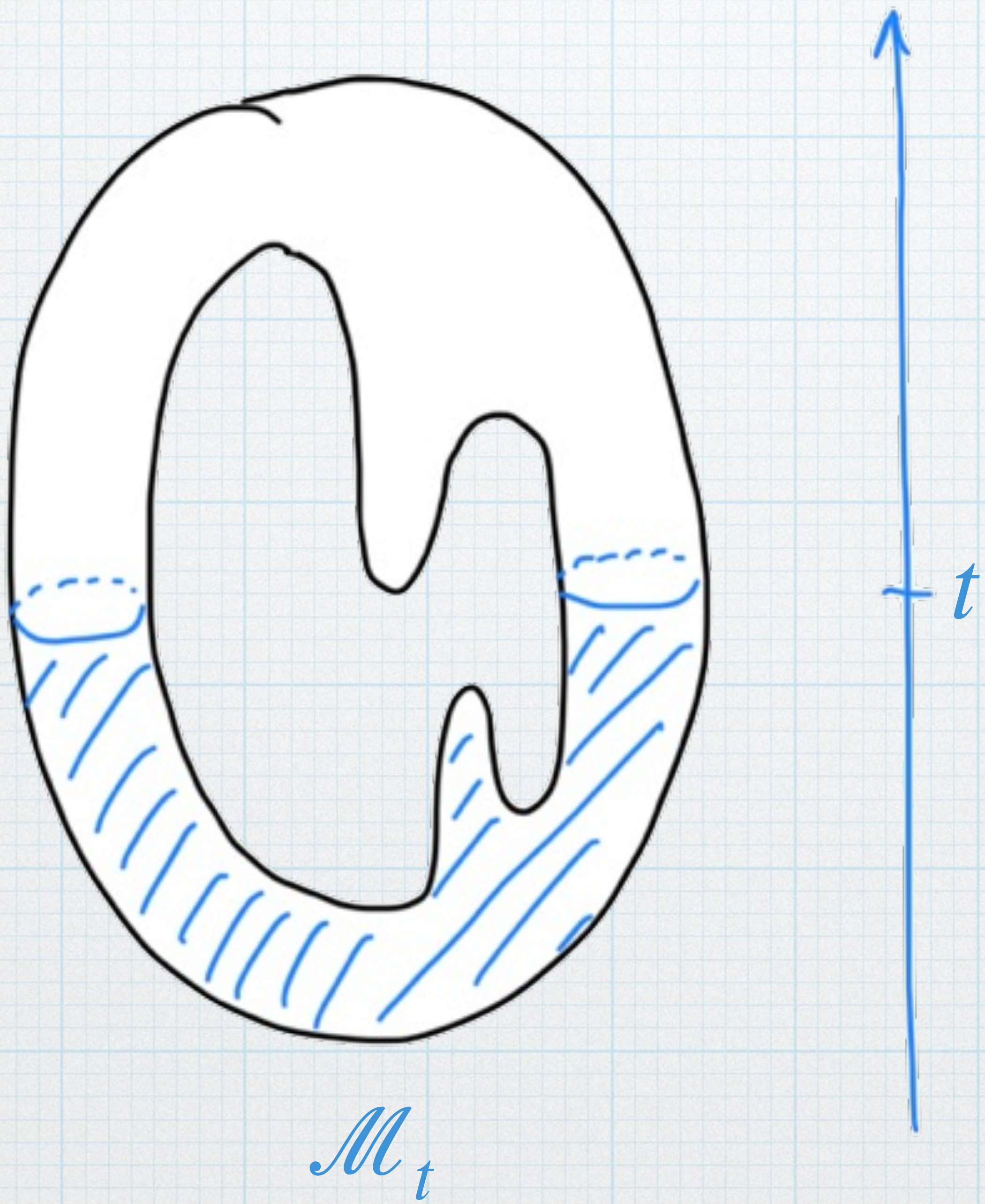
Homologie persistante



Homologie persistante



Homologie persistante



$f : \mathscr{M} \to \mathbb{R}$

Tame function :

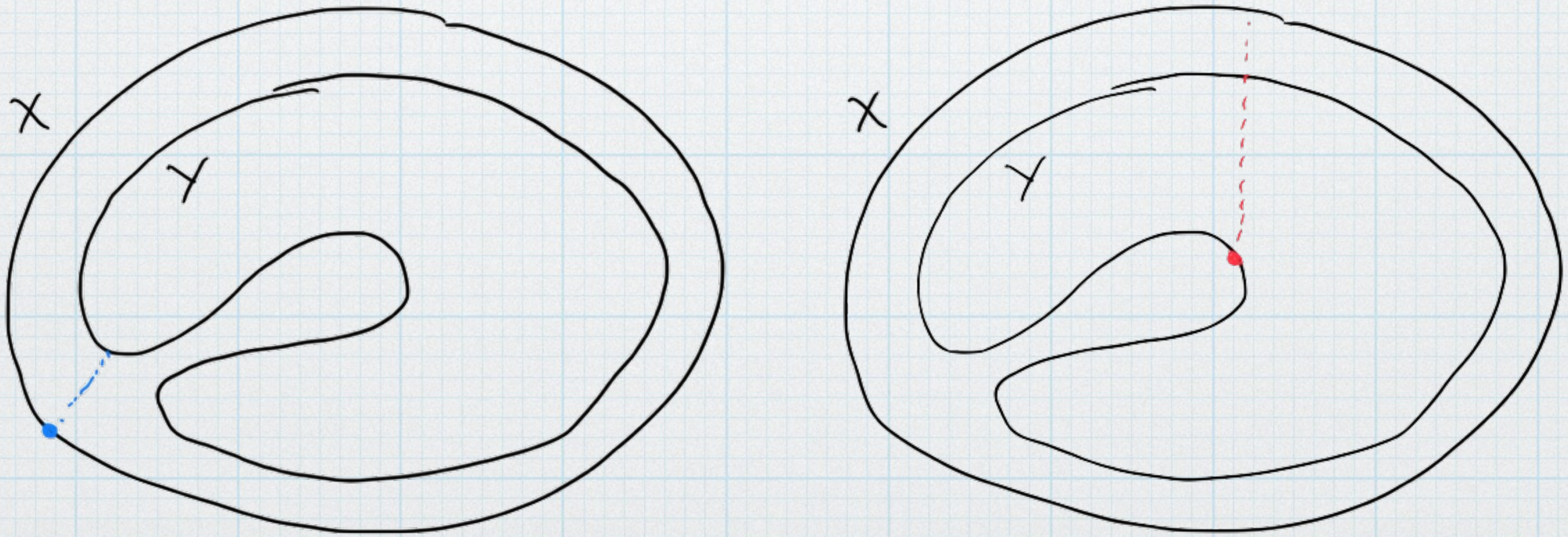
- **Nombre fini de valeurs critiques**
- $\forall k, t \quad H_k(\mathscr{M}_t)$ **de dim finie**

Théorème de stabilité

Stabilité de l'homologie persistante au « bruit »

Distance de Hausdorff

$$d_H(X, Y) = \max\left\{ \boxed{\sup_{x \in X} d(x, Y)}, \boxed{\sup_{y \in Y} d(y, X)} \right\}$$

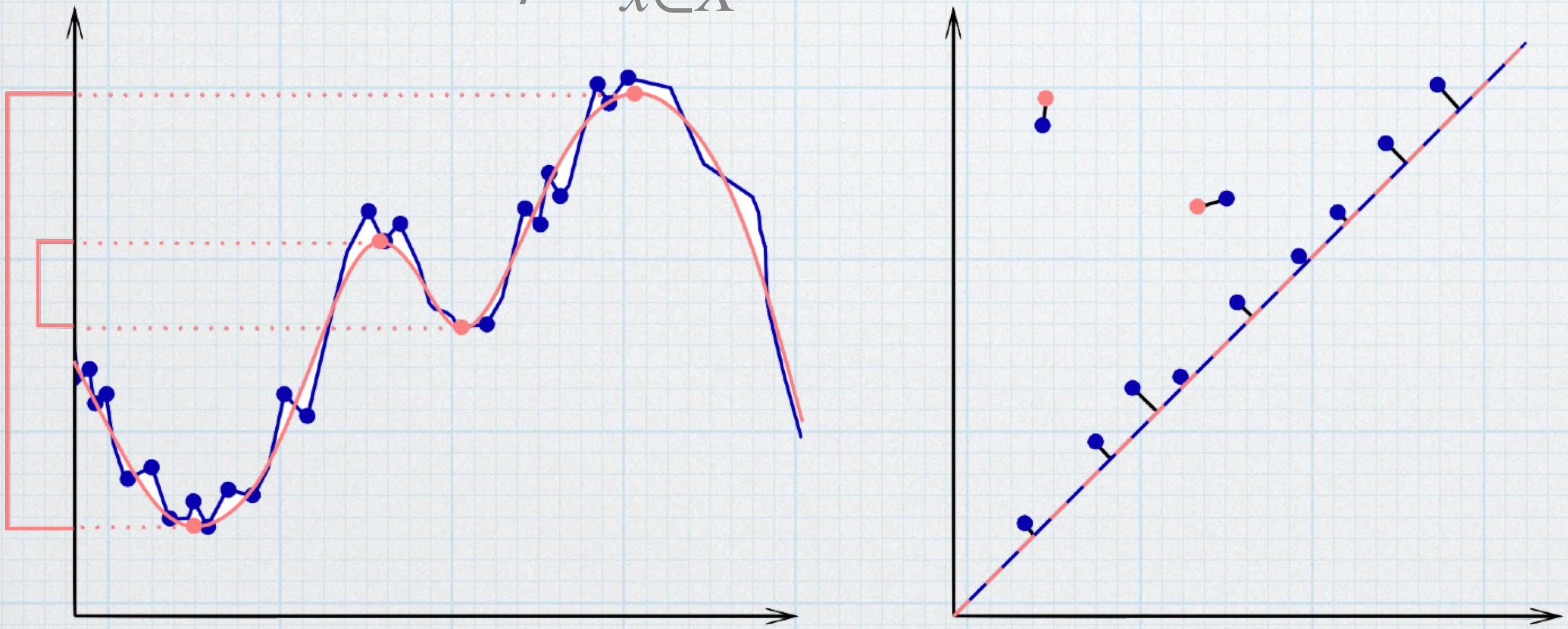


Théorème de stabilité

Stabilité de l'homologie persistante au « bruit »

Distance « Bottleneck » entre deux diagrammes

$$\mathrm{d}_B(X,Y) = \inf_{\phi} \sup_{x \in X} \|x - \phi(x)\|_\infty \qquad \phi : X \tilde{\to} Y$$



$\mathrm{d}_H(X,Y) \leqslant \mathrm{d}_B(X,Y)$

Extrait de « Stability of persistence diagrams ».
D. Cohen-Steiner, M. Edelsbrunner, J. Harer

Théorème de stabilité

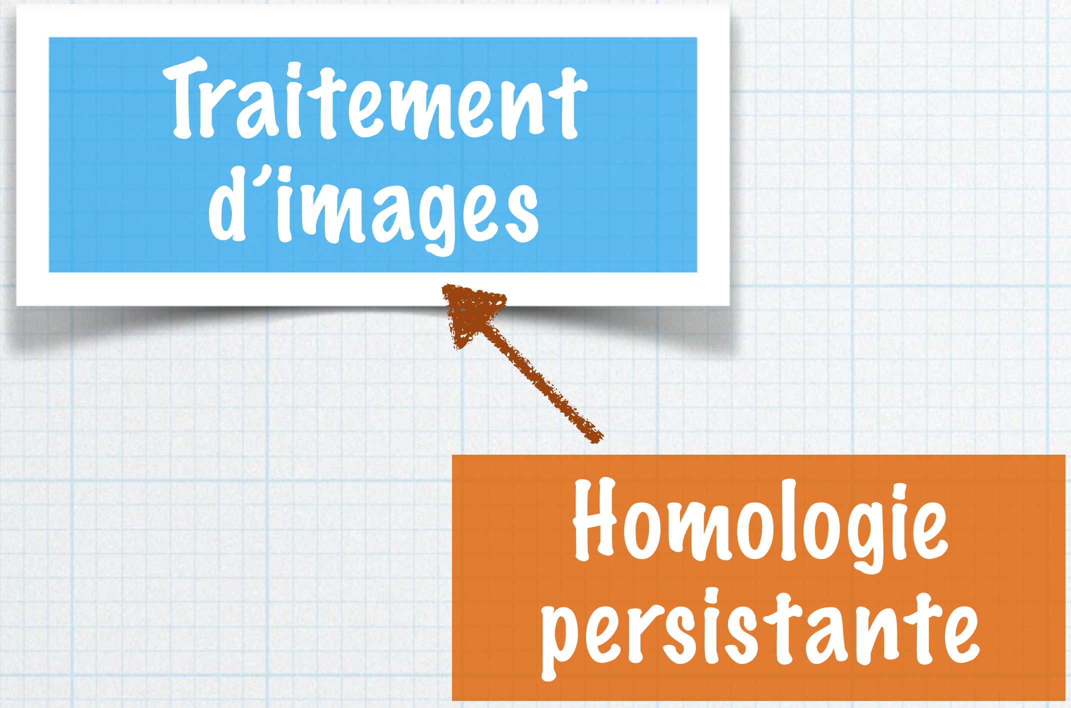
Théorème

$\mathbb{X}$ espace triangularisable et f, g deux « tame functions »

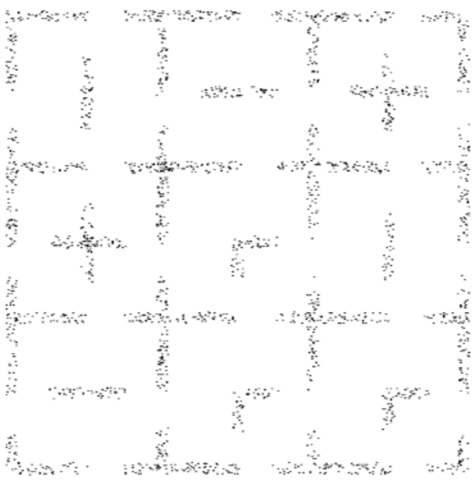
$$\mathrm{d}_B(D(f), D(g)) \leqslant \|f - g\|_\infty$$

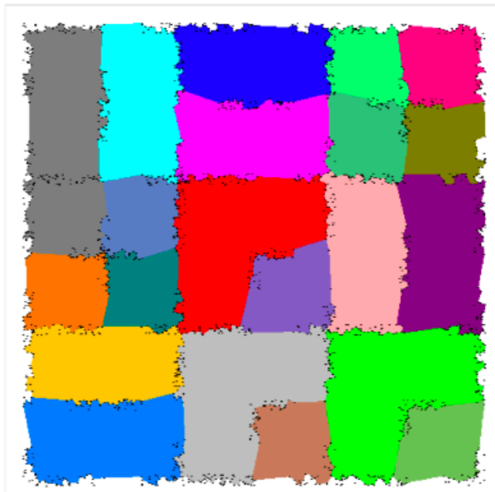
Quelques applications

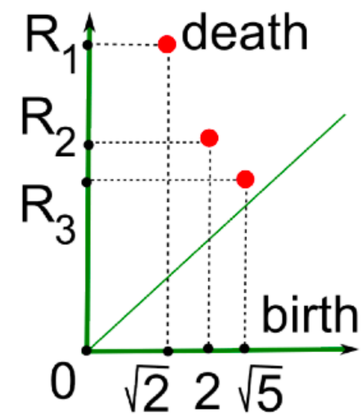
Sélectionner des applications est difficile tant il y en a ...

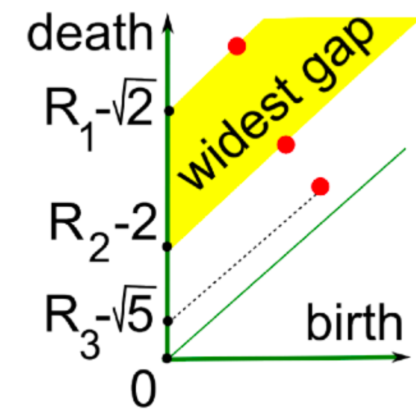

Traitement d'images
Homologie persistante

Retrouver des contours à partir d'un nuage de points

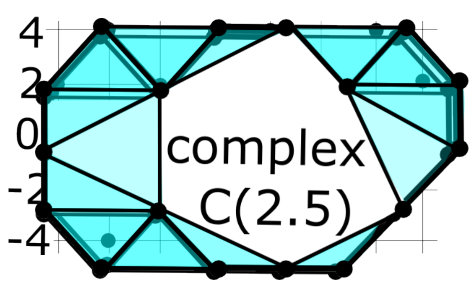








α-complexe

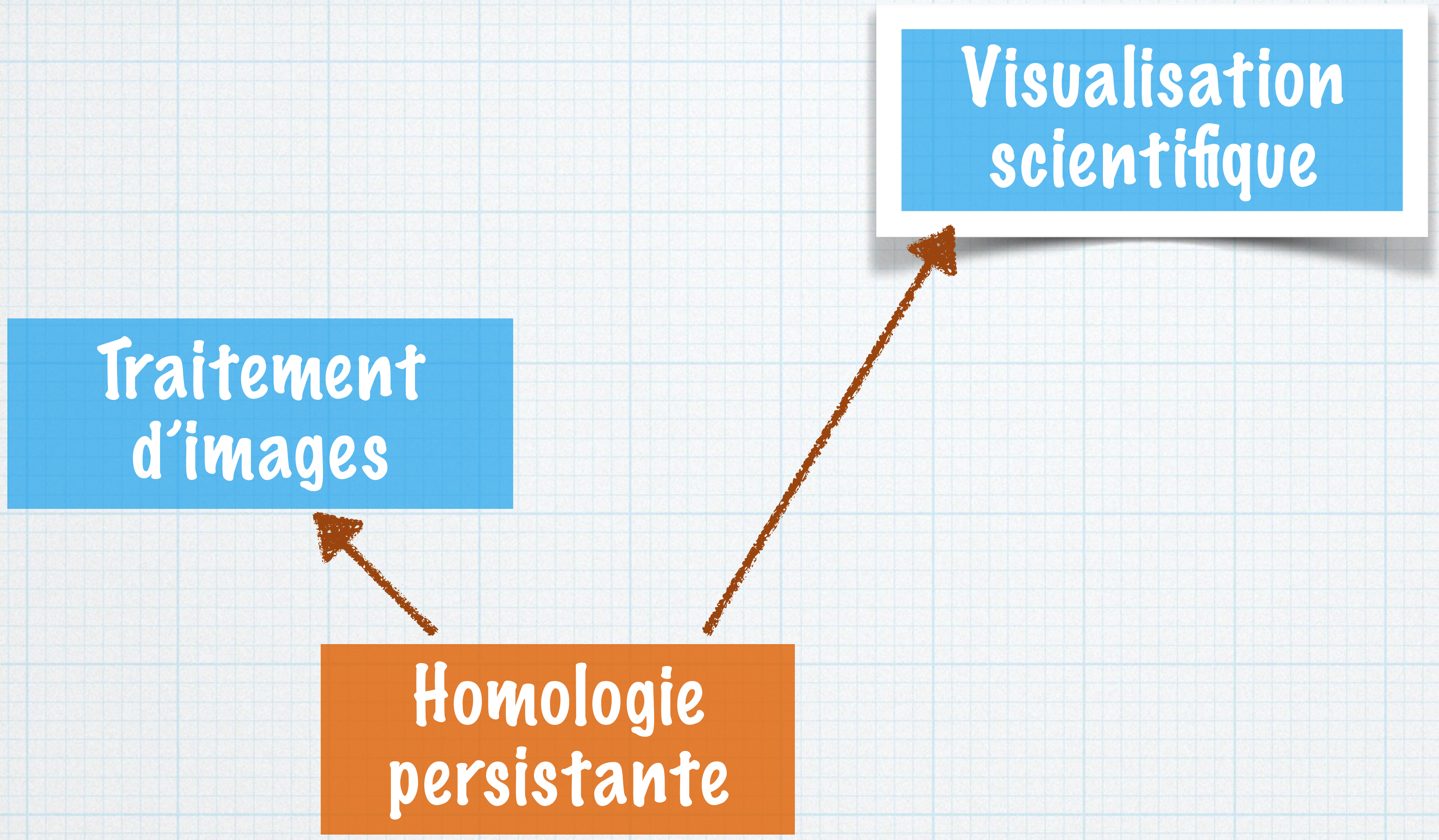


Persistance

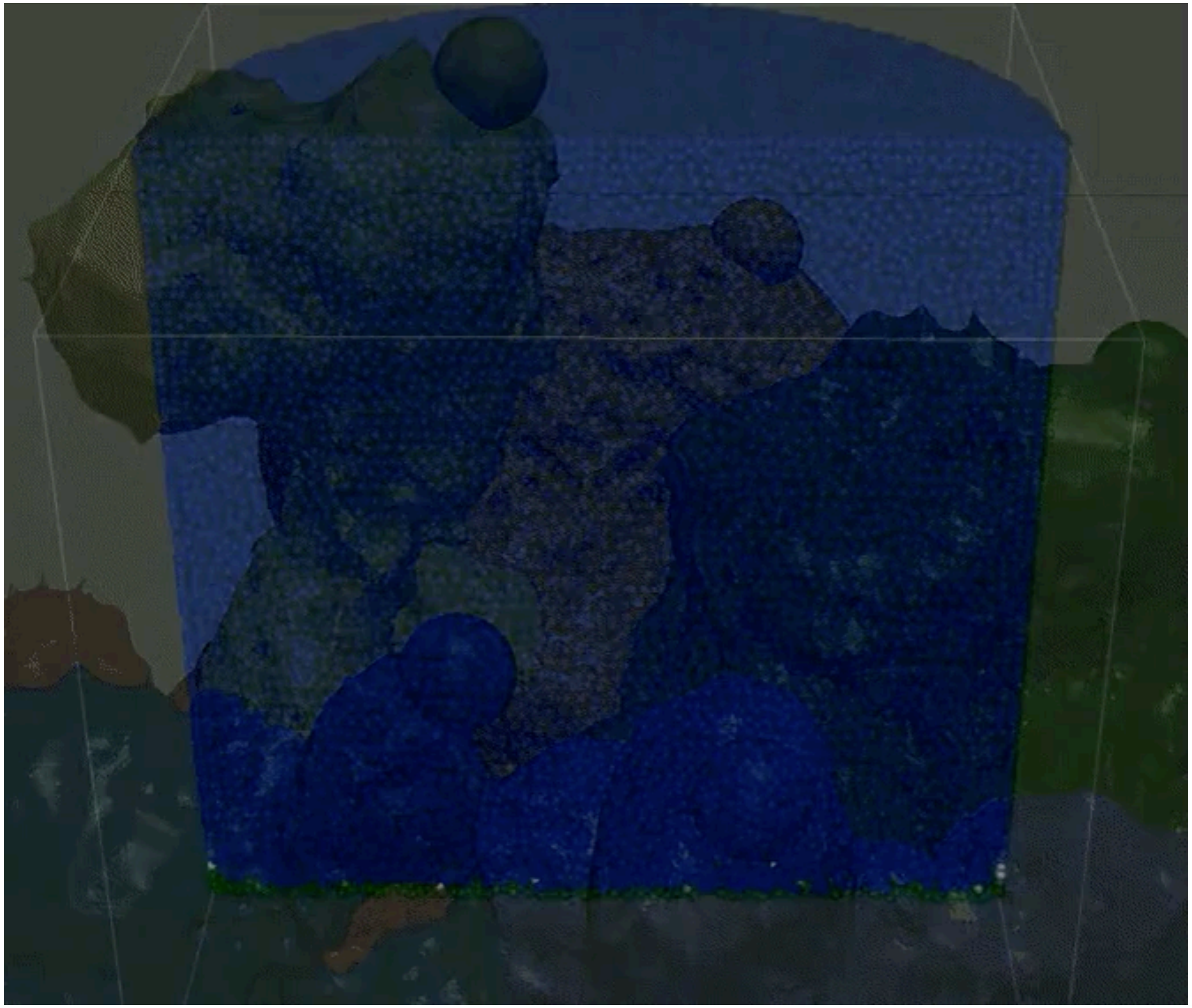
dim 1

Trous de persistance suffisante

« Auto-completion of Contours in Sketches, Maps and Sparse 2D Images Based on Topological Persistence », V. Kurlin

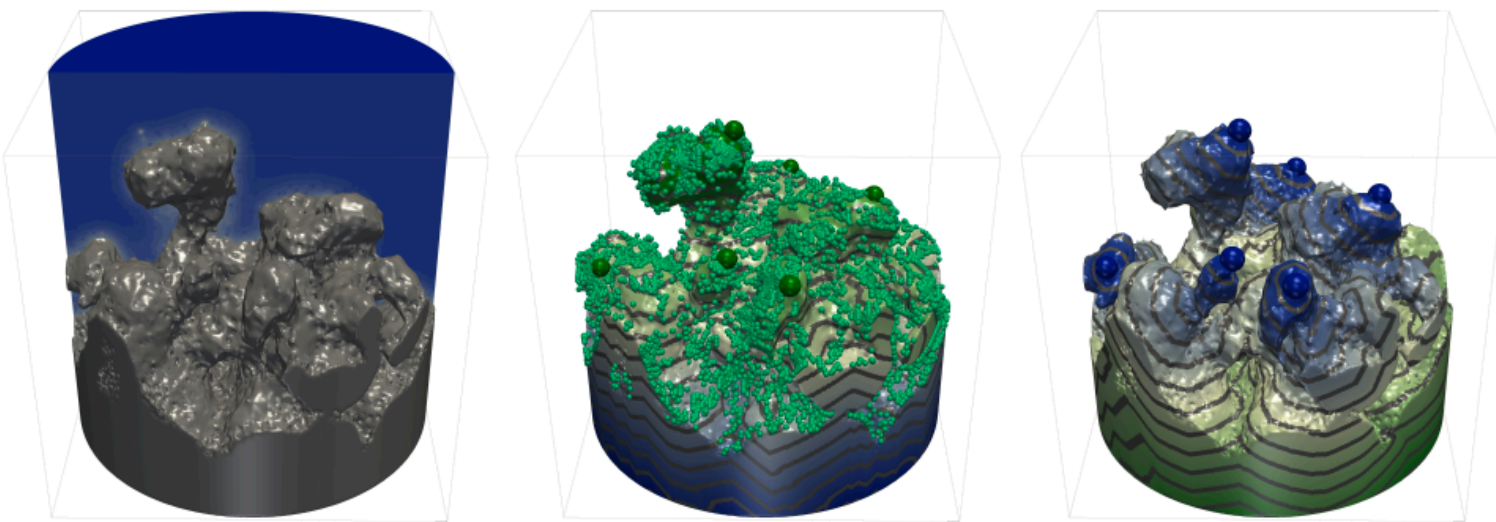

Visualisation scientifique
Traitement d'images
Homologie persistante

Visualiser/suivre la formation de « doigts » dans un écoulement d'eau salée

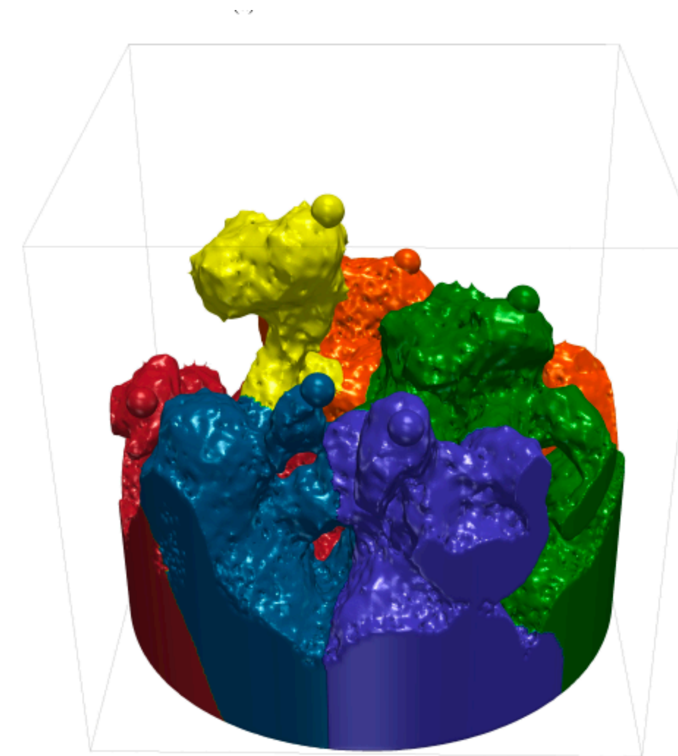


« Visualizing Ensembles of Viscous Fingers », G. Favelier, C. Gueunet, J. Tierny

Visualiser/suivre la formation de « doigts » dans un écoulement d'eau salée



(a) (b) (c)



(d)

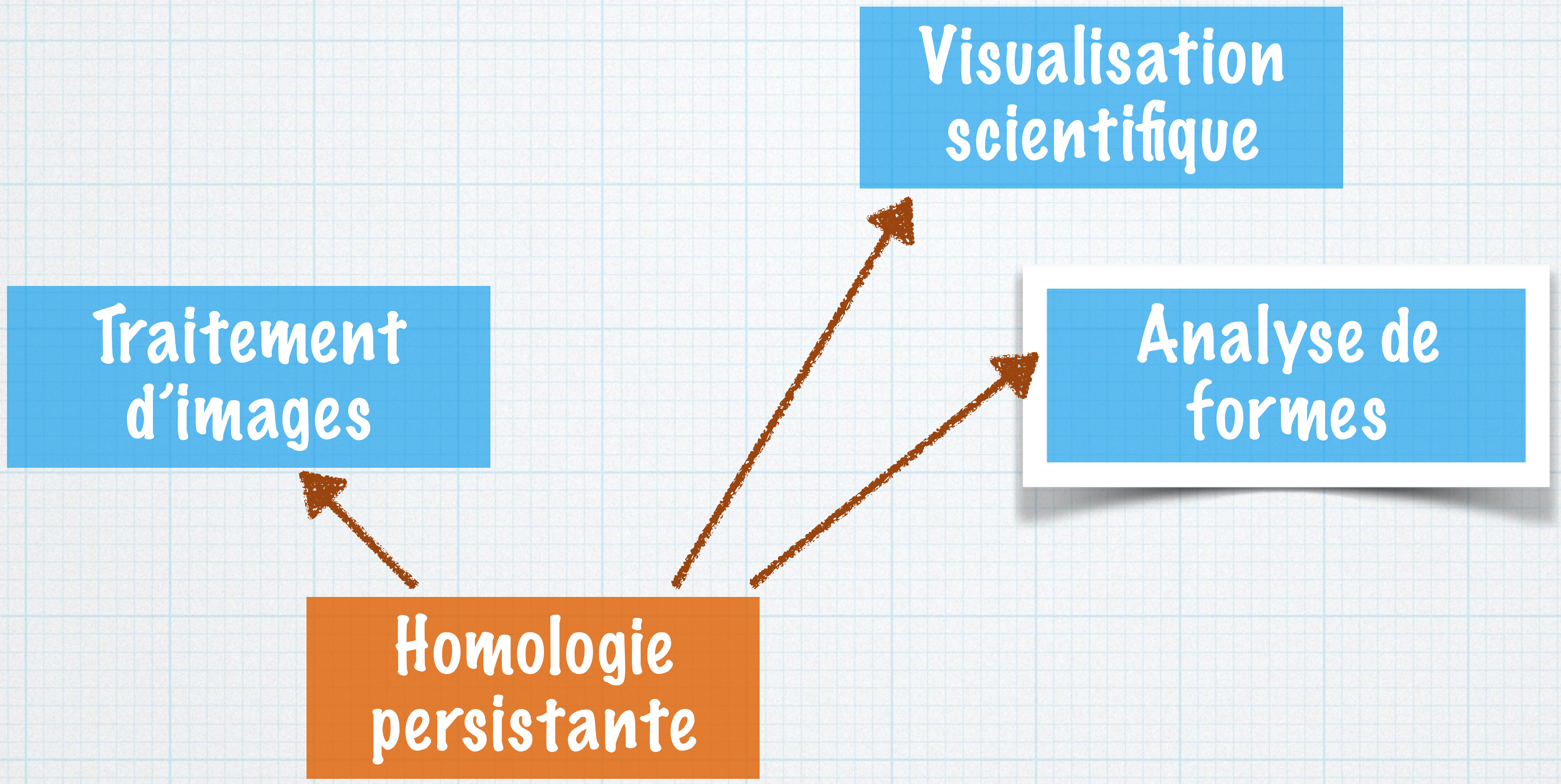
Seuillage
sur la
concentration

Maxima
locaux de
la distance
géodésique à la
base

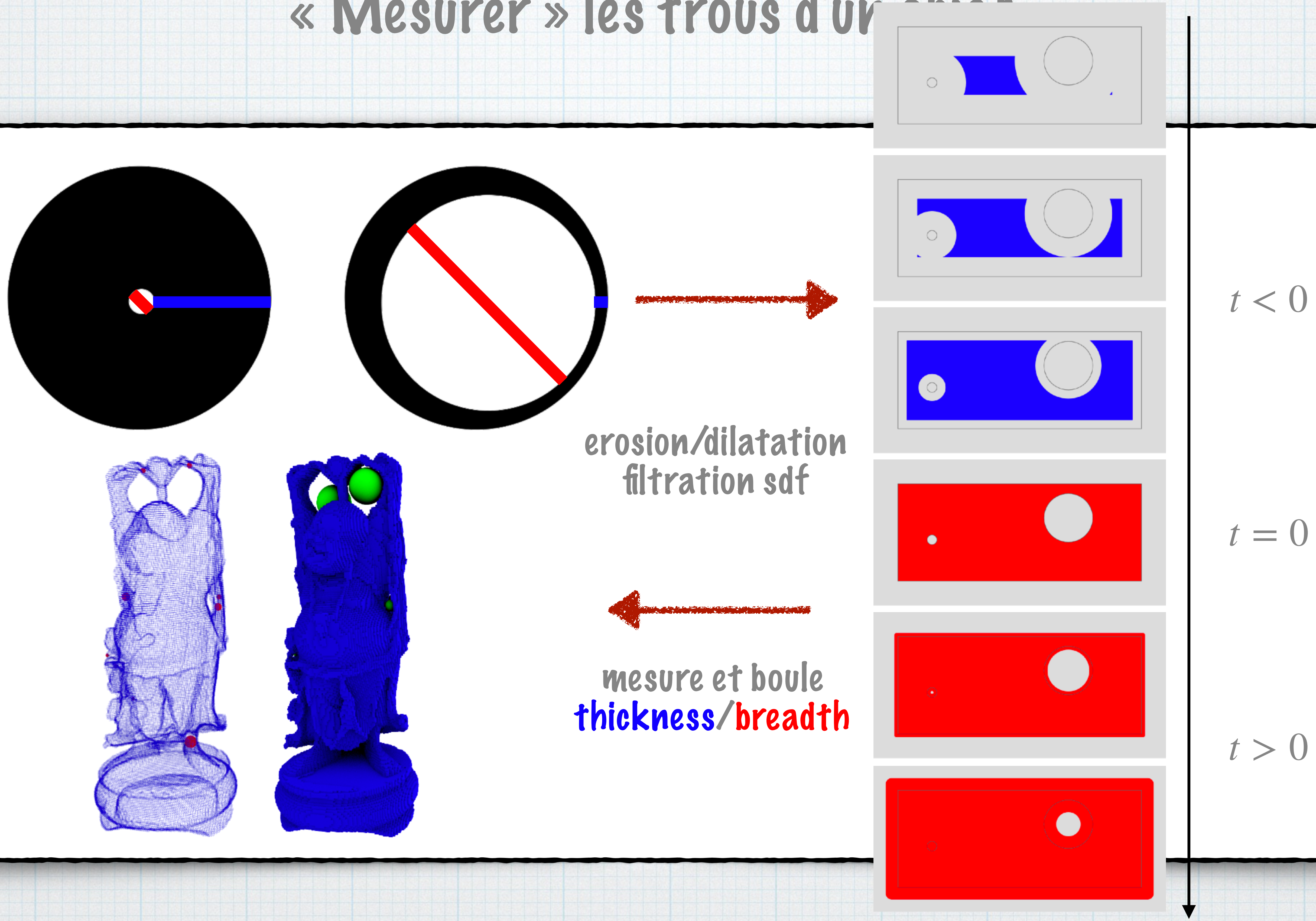
Persistance
de $\dim 0$
sur la
distance géodésique

Association aux trous
les plus persistants
les plus proches

« Visualizing Ensembles of Viscous Fingers », G. Favelier, C. Gueunet, J. Tierny

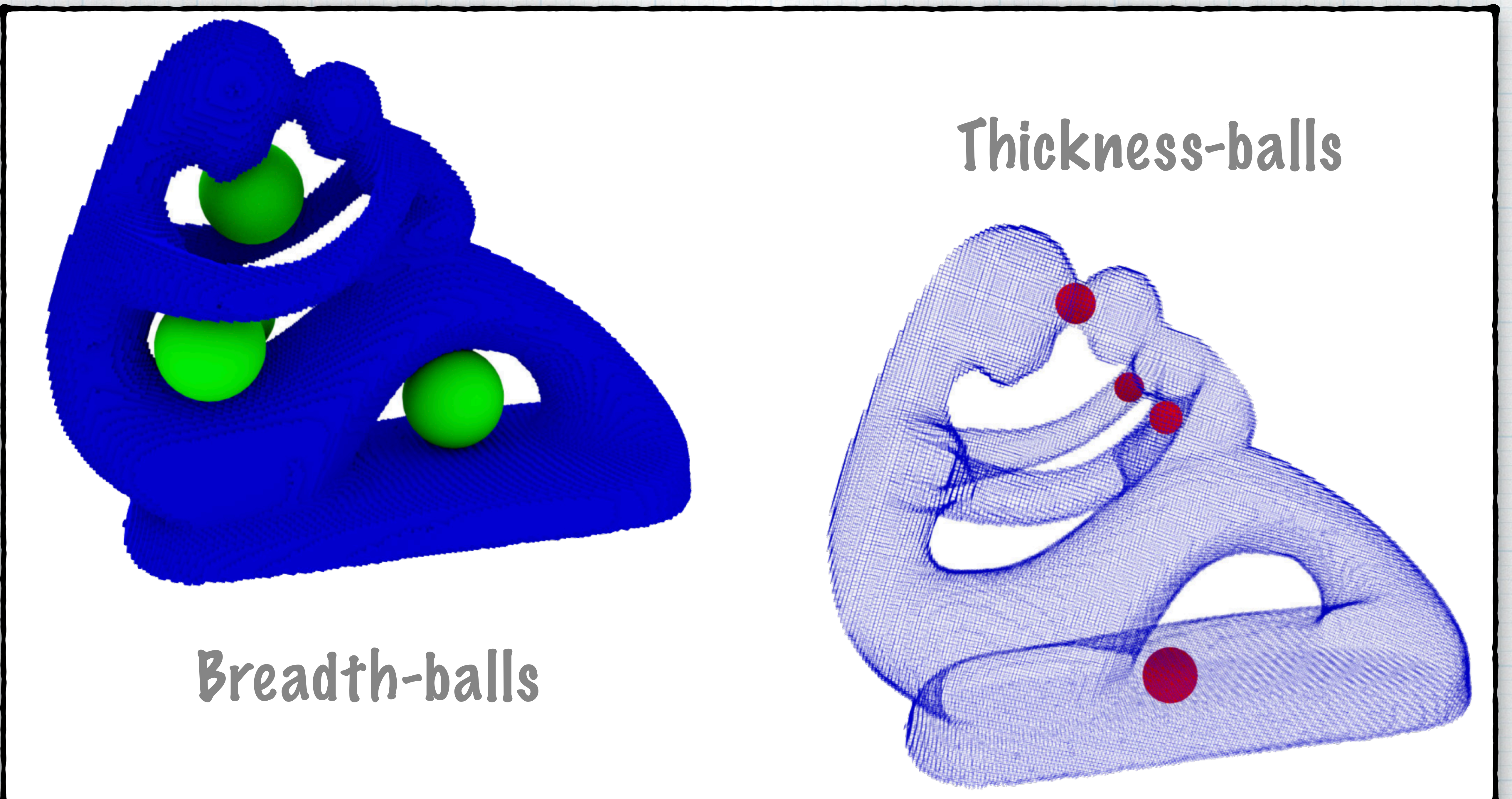

Visualisation scientifique
Traitement d'images
Analyse de formes
Homologie persistante

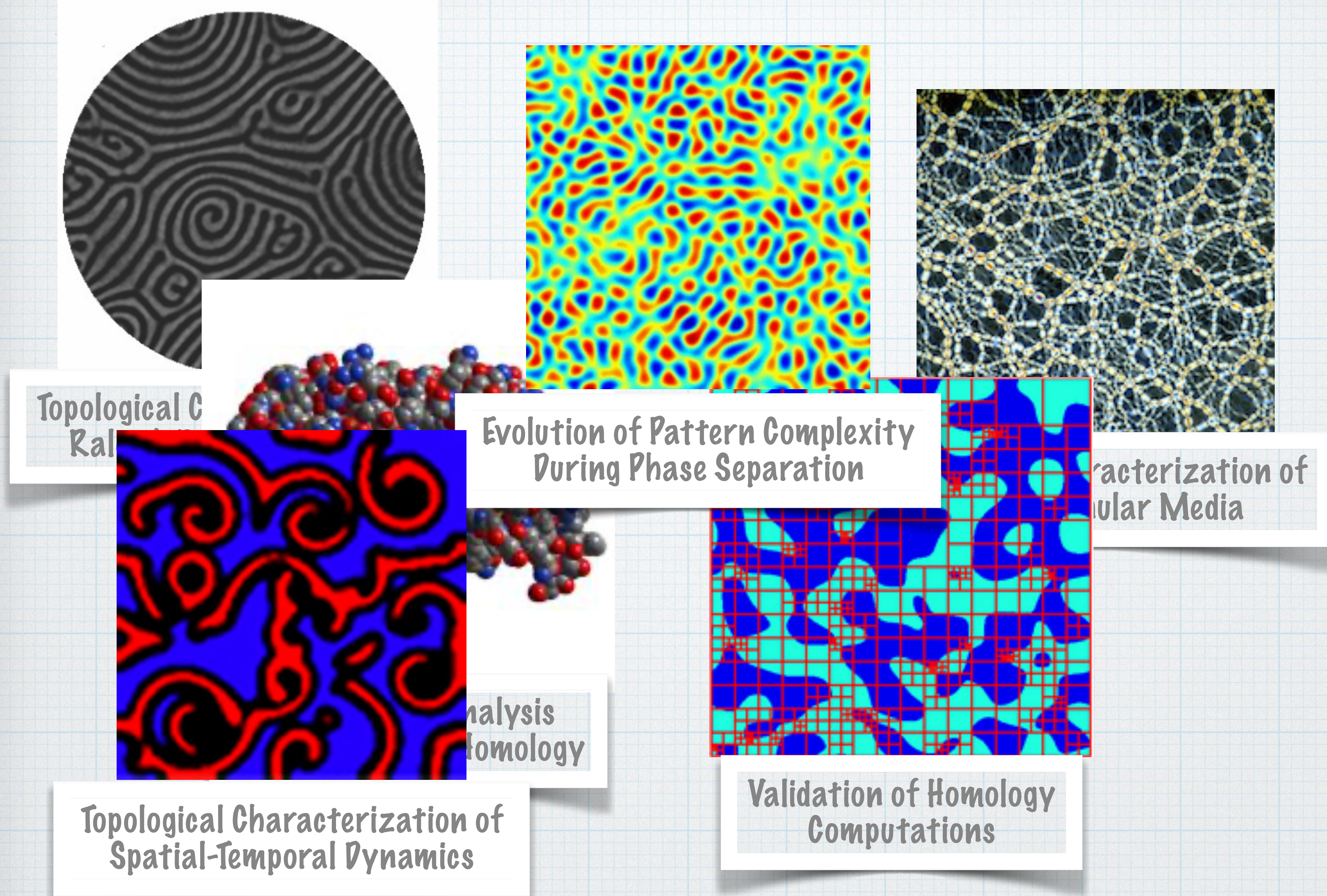
« Mesurer » les trous d'un



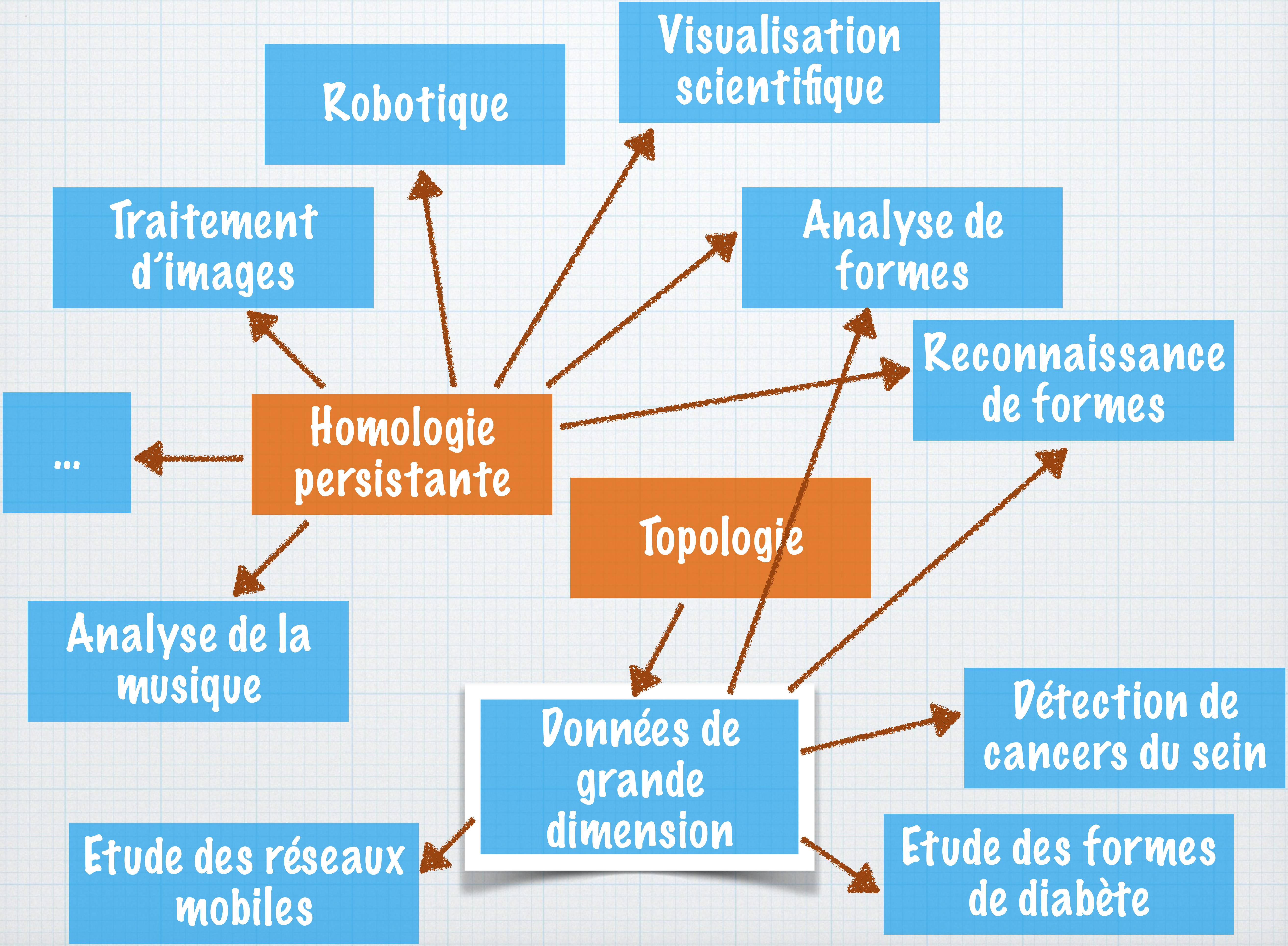
« Two Measures for the Homology Groups of Binary Volumes », A. Gonzalez-Lorenzo, A. Bac, J.L. Mari, P. Real

« Mesurer » les trous d'un objet





http://chomp.rutgers.edu/Projects/Topological_Data_Analysis.html


Visualisation scientifique
Robotique
Traitement d'images
Analyse de formes
Reconnaissance de formes
...
Homologie persistante
Topologie
Analyse de la musique
Données de grande dimension
Détection de cancers du sein
Etude des réseaux mobiles
Etude des formes de diabète

Analyse de données de grande dimension, réduction dimensionnelle

Etude de Miller-Reaven sur le diabète

6 paramètres :
- age
- relative weight
- fasting plasma glucose
- area under the plasma glucose curve for the 3h glucose tolerance test,
- area under the plasma insulin curve
- steady state plasma glucose response

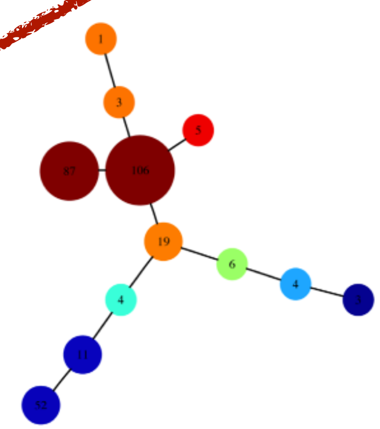
Ensemble de points
$X \subseteq \mathbb{R}^n$

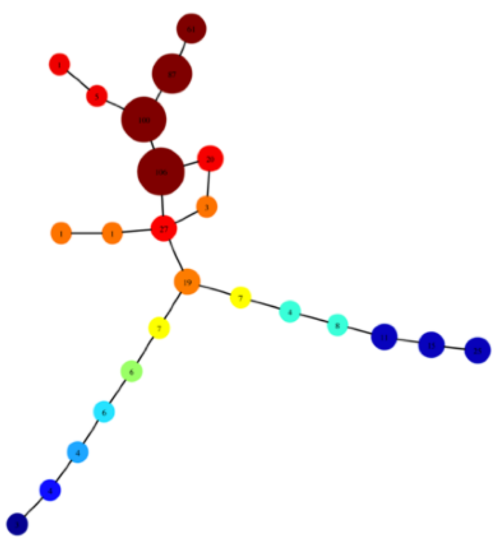
Fonctions de filtrage
$f_i : X \to \mathbb{R}$

Extraction du nerf du recouvrement associé

Approche multi-résolution

Complexe simplicial représentant les données





« Topology and data », G. Carlsson