

Estimation de la fonction de niveau de bruit d'images couleur en utilisant des représentations hiérarchiques et des statistiques non paramétriques

Baptiste ESTEBAN, Guillaume TOCHON et Thierry GÉRAUD
{*prenom.nom*}@lrde.epita.fr

Laboratoire de recherche et développement de l'EPITA

Mardi 16 Mars 2021



Introduction

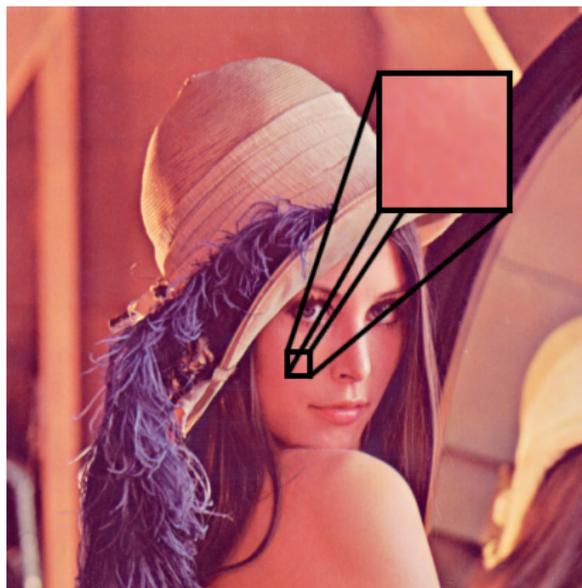
- Images corrompues durant l'acquisition.



- **Objectif** : Estimer le niveau de bruit pour le prendre en compte ou le supprimer.

Introduction

- Images corrompues durant l'acquisition.



- **Objectif** : Estimer le niveau de bruit pour le prendre en compte ou le supprimer.

Fonction de niveau de bruit (FNB)

- Modélisation du niveau de bruit sous la forme d'une fonction quadratique¹.

Définition

Soit $(a, b, c) \in (\mathbb{R}_+)^3$. Alors la fonction de niveau de bruit est définie par :

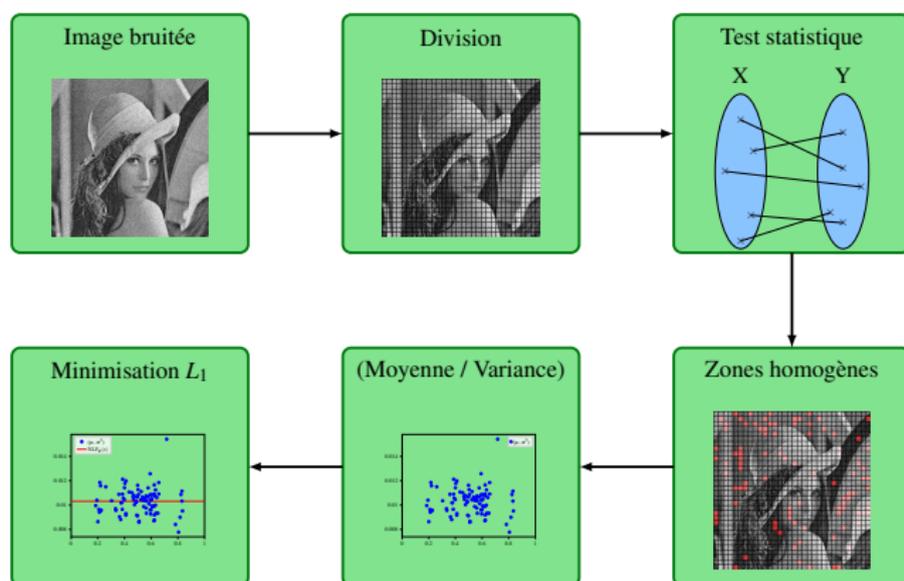
$$\sigma^2(x) = \text{FNB}(x) = ax^2 + bx + c$$

- Chaque coefficient correspond à un type de bruit :
 - ▶ a : bruit multiplicatif.
 - ▶ b : bruit de Poisson.
 - ▶ c : bruit gaussien.
- Il peut y avoir un bruit mixte.

¹Camille Sutour, Charles-Alban Deledalle, and Jean-François Aujol. "Estimation of the noise level function based on a non-parametric detection of homogeneous image regions". In: *SIAM Journal on Imaging Sciences* (Nov. 2015)

Estimation du niveau de bruit

- Méthode basée sur une division de l'image en blocs carrés²



²Camille Sutour, Charles-Alban Deledalle, and Jean-François Aujol. "Estimation of the noise level function based on a non-parametric detection of homogeneous image regions". In: *SIAM Journal on Imaging Sciences* (Nov. 2015)

Coefficient de corrélation τ de Kendall³

- Mesure de corrélation du rang entre deux séquences X et Y .

Définition

Soit $X \in \mathbb{R}^n$ et $Y \in \mathbb{R}^n$ deux séquences de n nombres réels. Le coefficient du τ de Kendall est défini par :

$$\tau(X, Y) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^j \text{sign}(x_i - x_j) \text{sign}(y_i - y_j)$$

avec $x_i \neq x_j$ et $y_i \neq y_j$.

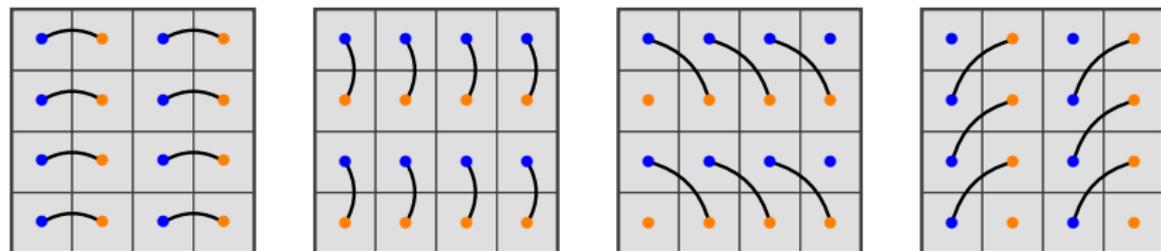
- Cette mesure de corrélation a été étendue aux paires liées ($x_i = x_j$ ou $y_i = y_j$)⁴.

³ Maurice G Kendall. "A new measure of rank correlation". In: *Biometrika* (1938), pp. 81–93

⁴ Maurice G Kendall. "The treatment of ties in ranking problems". In: *Biometrika* (1945), pp. 239–251

Test statistique

- Division de l'image en 2 séquences de pixels.



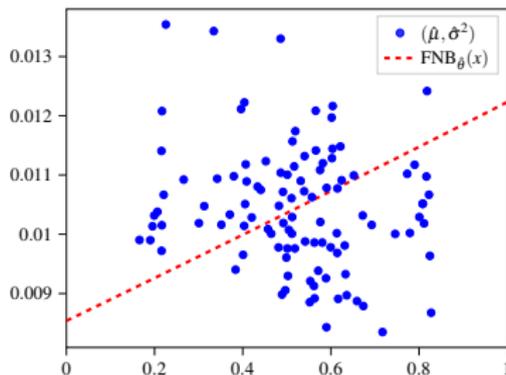
- Calcul du τ de Kendall et de sa valeur p N fois (avec N le nombre de division effectuée)
- Comparaisons des valeurs p avec un niveau de détection α :
 - ▶ $p \geq \alpha$: le bloc est homogène (il ne contient que du bruit).
 - ▶ $p < \alpha$: le bloc n'est pas homogène.

Estimation de la FNB

- Calcul de la moyenne empirique $\hat{\mu}$ et de la variance empirique $\hat{\sigma}^2$ de chaque bloc homogène.
- Problème d'optimisation :

$$\underset{(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^2}{\operatorname{argmin}} \quad \|a\hat{\mu}^2 + b\hat{\mu} + c - \hat{\sigma}^2\|_1 \quad (\text{P})$$

- Minimisation L_1 plus robuste à de potentielles valeurs aberrantes qu'une minimisation L_2 .
- Résolution du problème (P) en utilisant l'algorithme primal-dual de Chambolle-Pock⁵



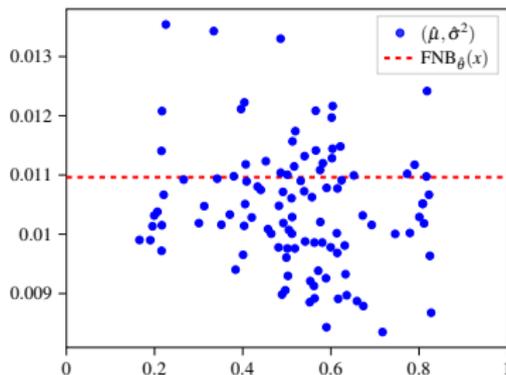
⁵ Antonin Chambolle and Thomas Pock. "A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging". In: *Journal of mathematical imaging and vision* 40.1 (2011), pp. 120–145

Estimation de la FNB

- Calcul de la moyenne empirique $\hat{\mu}$ et de la variance empirique $\hat{\sigma}^2$ de chaque bloc homogène.
- Problème d'optimisation :

$$\operatorname{argmin}_{(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^2} \|a\hat{\mu}^2 + b\hat{\mu} + c - \hat{\sigma}^2\|_1 \quad (\text{P})$$

- Minimisation L_1 plus robuste à de potentielles valeurs aberrantes qu'une minimisation L_2 .
- Résolution du problème (P) en utilisant l'algorithme primal-dual de Chambolle-Pock⁵



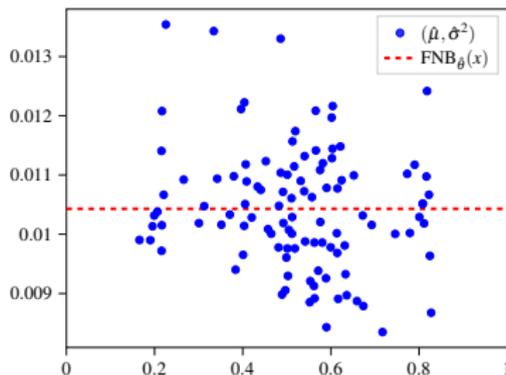
⁵ Antonin Chambolle and Thomas Pock. "A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging". In: *Journal of mathematical imaging and vision* 40.1 (2011), pp. 120–145

Estimation de la FNB

- Calcul de la moyenne empirique $\hat{\mu}$ et de la variance empirique $\hat{\sigma}^2$ de chaque bloc homogène.
- Problème d'optimisation :

$$\underset{(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^2}{\operatorname{argmin}} \quad \|a\hat{\mu}^2 + b\hat{\mu} + c - \hat{\sigma}^2\|_1 \quad (\text{P})$$

- Minimisation L_1 plus robuste à de potentielles valeurs aberrantes qu'une minimisation L_2 .
- Résolution du problème (P) en utilisant l'algorithme primal-dual de Chambolle-Pock⁵



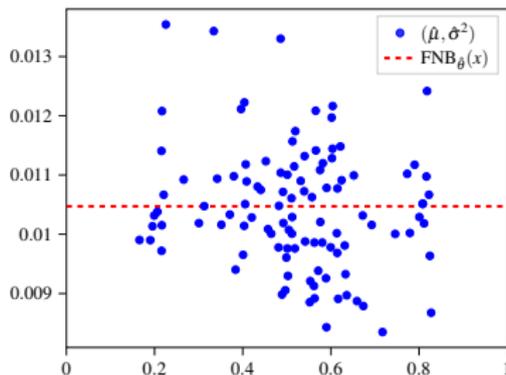
⁵ Antonin Chambolle and Thomas Pock. "A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging". In: *Journal of mathematical imaging and vision* 40.1 (2011), pp. 120–145

Estimation de la FNB

- Calcul de la moyenne empirique $\hat{\mu}$ et de la variance empirique $\hat{\sigma}^2$ de chaque bloc homogène.
- Problème d'optimisation :

$$\underset{(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^2}{\operatorname{argmin}} \quad \|a\hat{\mu}^2 + b\hat{\mu} + c - \hat{\sigma}^2\|_1 \quad (\text{P})$$

- Minimisation L_1 plus robuste à de potentielles valeurs aberrantes qu'une minimisation L_2 .
- Résolution du problème (P) en utilisant l'algorithme primal-dual de Chambolle-Pock⁵



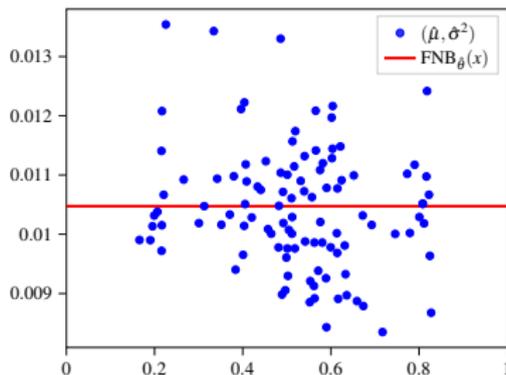
⁵ Antonin Chambolle and Thomas Pock. "A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging". In: *Journal of mathematical imaging and vision* 40.1 (2011), pp. 120–145

Estimation de la FNB

- Calcul de la moyenne empirique $\hat{\mu}$ et de la variance empirique $\hat{\sigma}^2$ de chaque bloc homogène.
- Problème d'optimisation :

$$\operatorname{argmin}_{(a,b,c) \in (\mathbb{R}_+)^2} \|a\hat{\mu}^2 + b\hat{\mu} + c - \hat{\sigma}^2\|_1 \quad (\text{P})$$

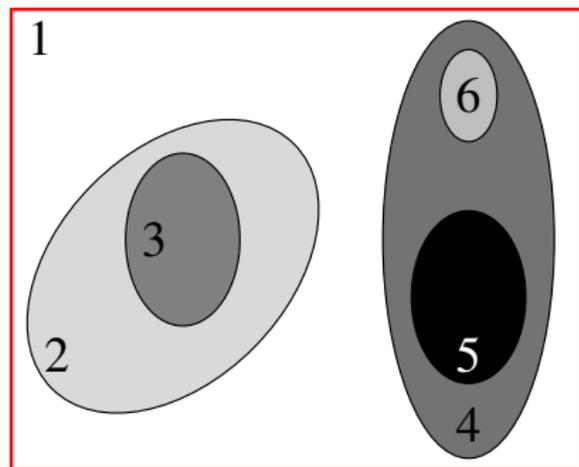
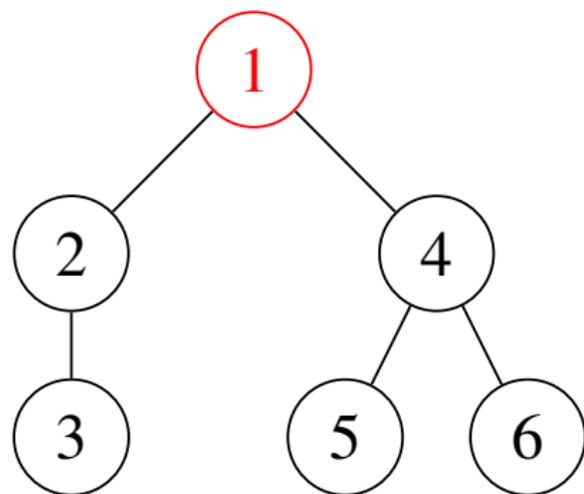
- Minimisation L_1 plus robuste à de potentielles valeurs aberrantes qu'une minimisation L_2 .
- Résolution du problème (P) en utilisant l'algorithme primal-dual de Chambolle-Pock⁵



⁵ Antonin Chambolle and Thomas Pock. "A first-order primal-dual algorithm for convex problems with applications to imaging". In: *Journal of mathematical imaging and vision* 40.1 (2011), pp. 120–145

L'arbre des formes⁶

- Arbre d'inclusion des lignes de niveaux.



- Construction avec une complexité linéaire⁷.

⁶ Pascal Monasse and Frédéric Guichard. "Fast computation of a contrast-invariant image representation". In: *IEEE transactions on image processing : a publication of the IEEE Signal Processing Society* 9 (Feb. 2000), pp. 860–72

⁷ Edwin Carlinet, Thierry Géraud, and Sébastien Crozet. "The Tree of Shapes Turned into a Max-Tree: A Simple and Efficient Linear Algorithm". In: *Proceedings of the 24th IEEE International Conference on Image Processing (ICIP)*. Athens, Greece, Oct. 2018, pp. 1488–1492

Simplification de l'arbre des formes

- Minimisation de la fonctionnelle de Mumford-Shah⁸.

Fonctionnelle de Mumford-Shah pour une fonction constante par morceaux

$$E(f, \partial R) = \iint_R (\tilde{f} - f)^2 dx dy + \lambda |\partial R|$$

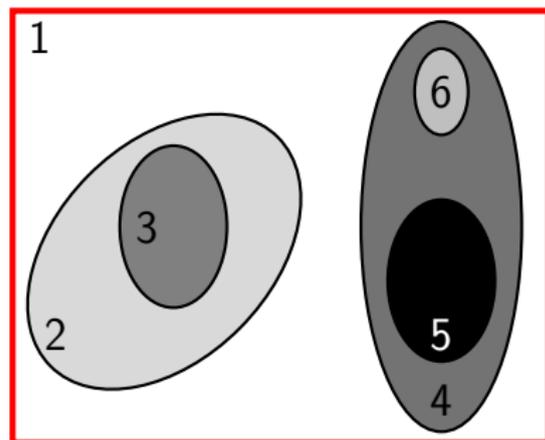
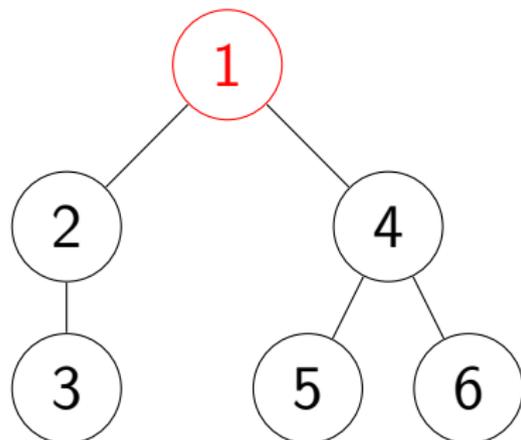
avec :

- f : une image
- $R = R_1 \cup \dots \cup R_i \cup \dots \cup R_n$ l'ensemble des régions de f .
- \tilde{f} : Une fonction régulière dans chaque région R_i (ici la moyenne des valeurs de cette région).
- ∂R : l'ensemble des contours des régions de R
- λ : un paramètre de régularisation.

⁸D. Mumford and J. Shah. "Optimal approximations by piecewise smooth functions and associated variational problems". In: *Communications on Pure and Applied Mathematics* 42.5 (1989), pp. 577–685

Simplification de l'arbre des formes

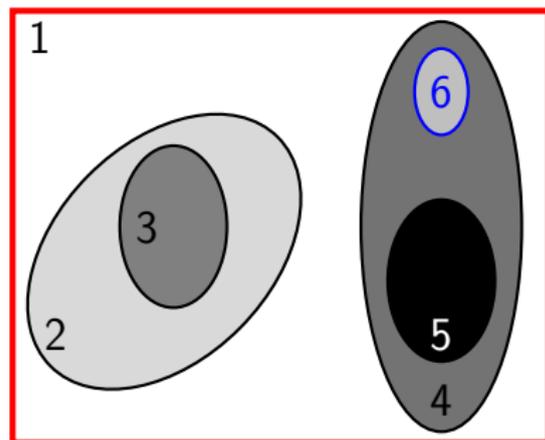
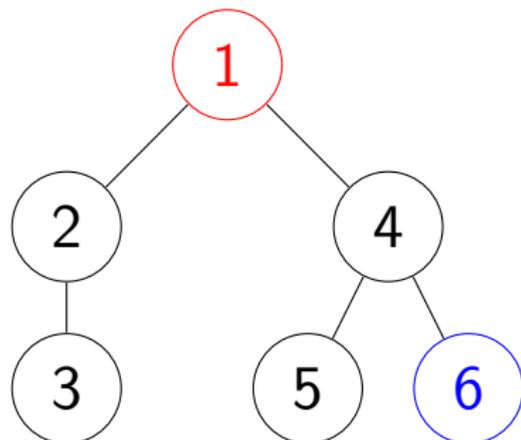
- Suppression d'un noeud en fonction de la variation de l'énergie du noeud et de son parent dans l'arbre⁹.



⁹Yongchao Xu, Thierry Géraud, and Laurent Najman. "Salient Level Lines Selection Using the Mumford-Shah Functional". In: *ICIP 2013*. Melbourne, Australia, Sept. 2013, pp. 1–5

Simplification de l'arbre des formes

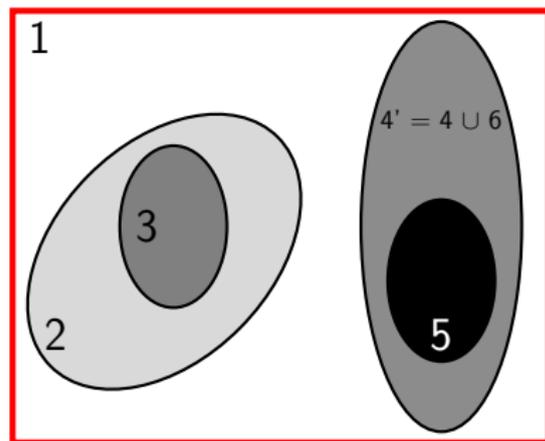
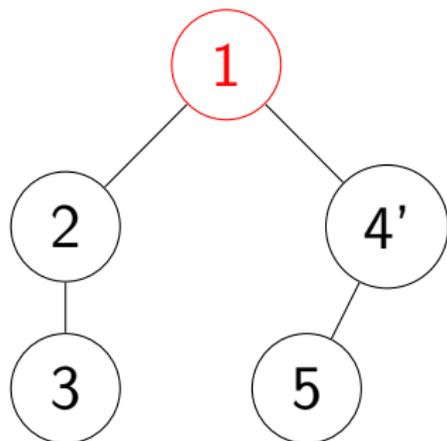
- Suppression d'un noeud en fonction de la variation de l'énergie du noeud et de son parent dans l'arbre⁹.



⁹Yongchao Xu, Thierry Géraud, and Laurent Najman. "Salient Level Lines Selection Using the Mumford-Shah Functional". In: *ICIP 2013*. Melbourne, Australia, Sept. 2013, pp. 1–5

Simplification de l'arbre des formes

- Suppression d'un noeud en fonction de la variation de l'énergie du noeud et de son parent dans l'arbre⁹.



⁹Yongchao Xu, Thierry Géraud, and Laurent Najman. "Salient Level Lines Selection Using the Mumford-Shah Functional". In: *ICIP 2013*. Melbourne, Australia, Sept. 2013, pp. 1–5

Simplification de l'arbre des formes



Image originale



Image reconstruite ($\lambda = 500$)

Simplification de l'arbre des formes



Image originale



Image reconstruite ($\lambda = 1000$)

Simplification de l'arbre des formes

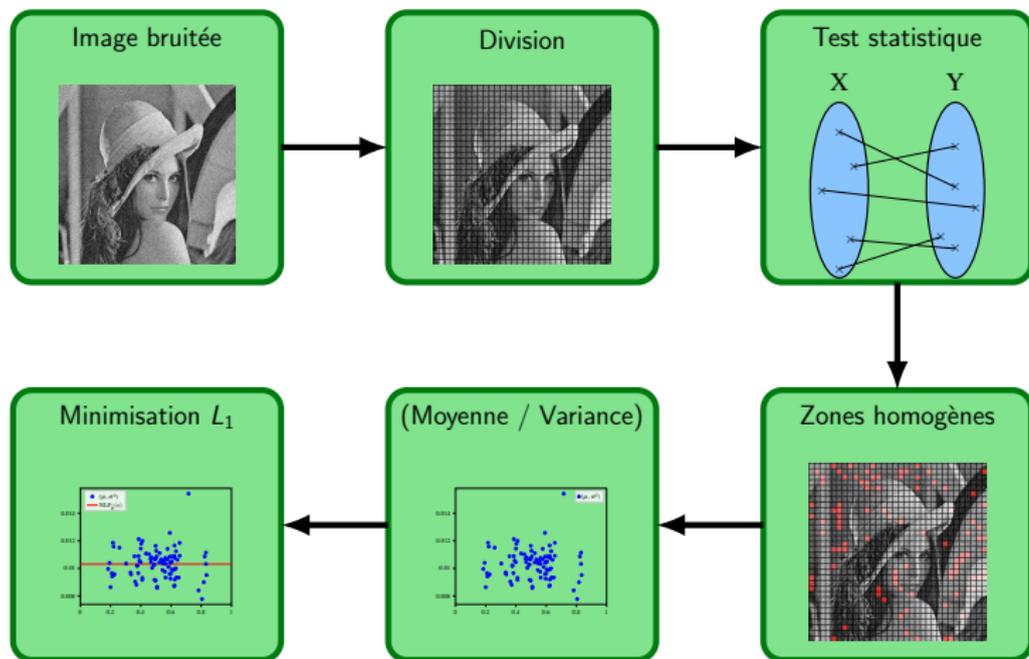


Image originale

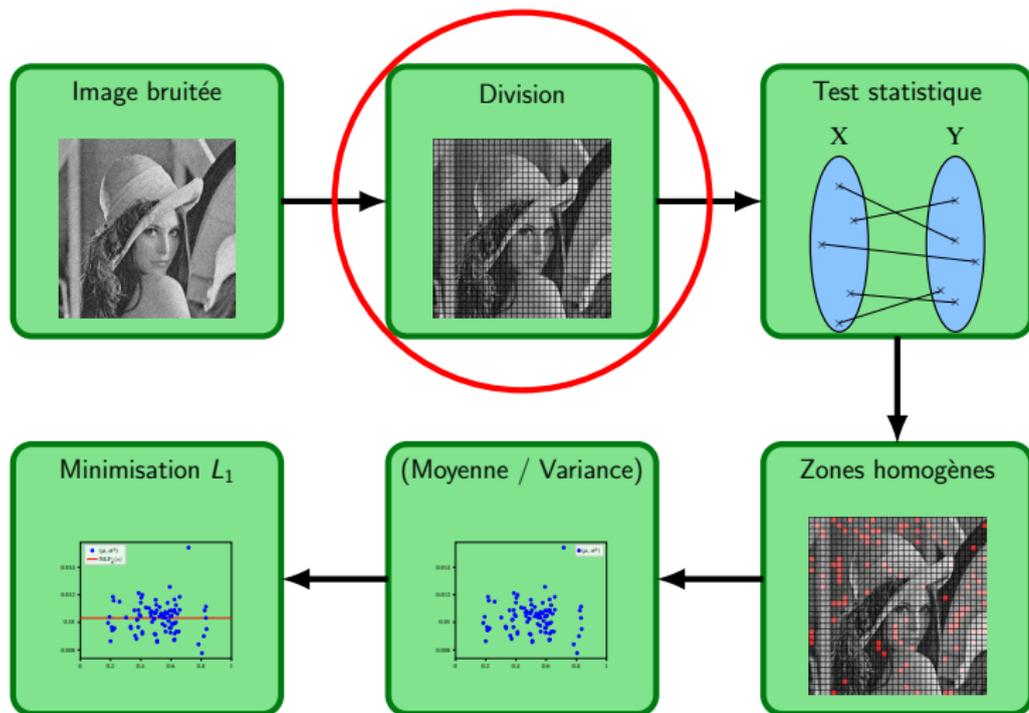


Image reconstruite ($\lambda = 2000$)

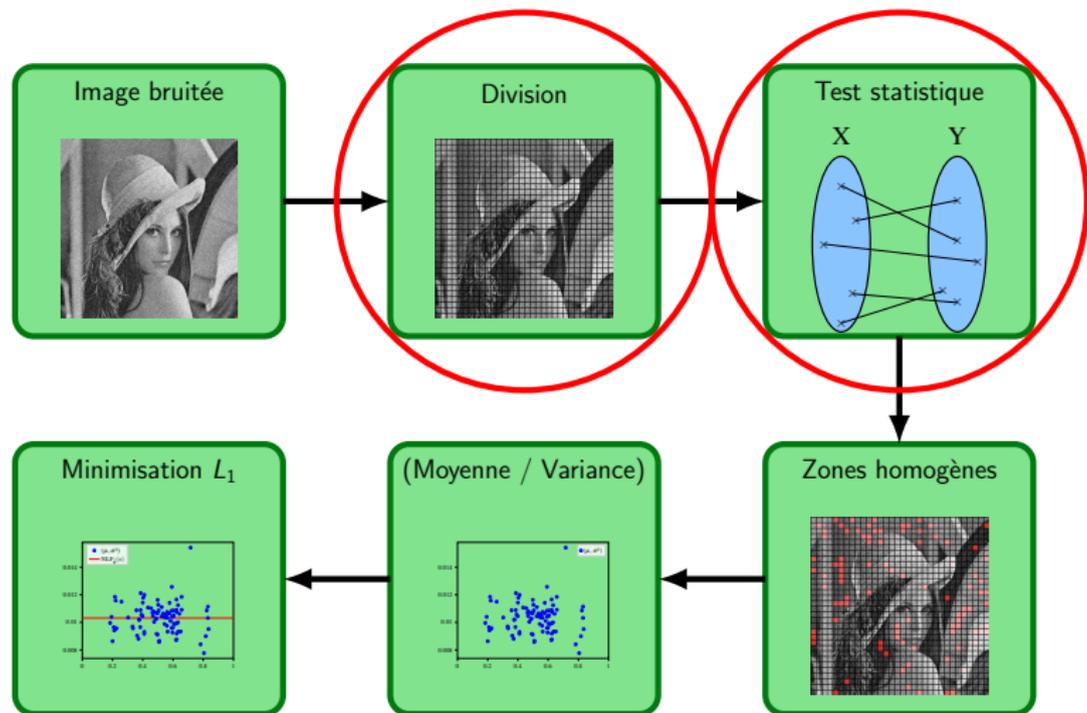
Adaptation de la méthode au contenu d'une image



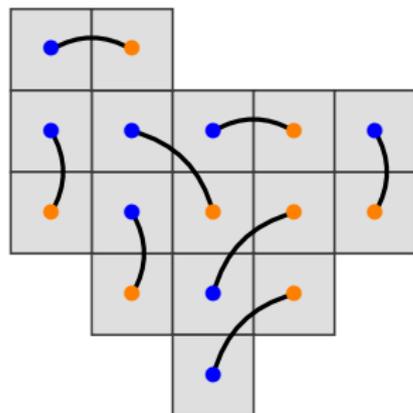
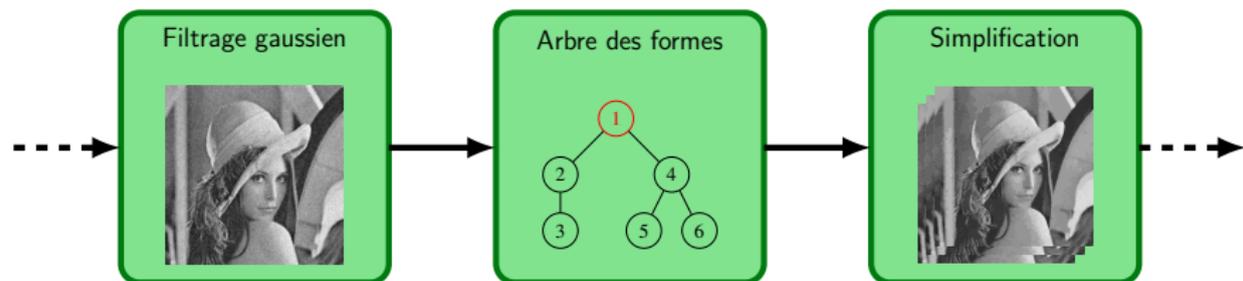
Adaptation de la méthode au contenu d'une image



Adaptation de la méthode au contenu d'une image



Adaptation de la méthode au contenu d'une image¹⁰



- Calcul des *formes* homogènes sur les composantes connexes de l'image simplifiée reconstruite.
- Division en 2 séquences de valeurs aléatoirement pour le τ de Kendall.

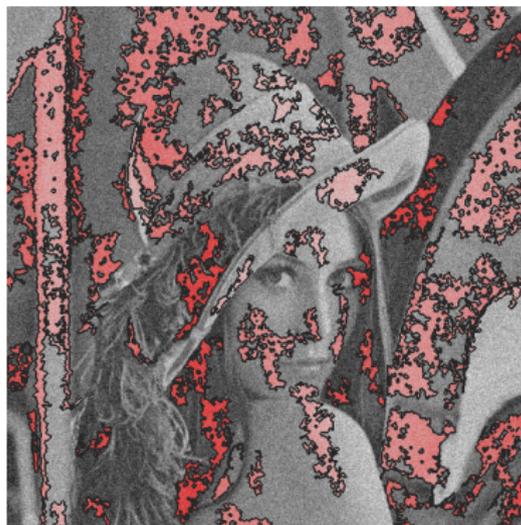
¹⁰ Baptiste Esteban, Guillaume Tochon, and Thierry Géraud. "Estimating the noise level function with the tree of shapes and non-parametric statistics". In: *Proceedings of the 18th International Conference on Computer Analysis of Images and Patterns (CAIP)*. vol. 11679. Springer, Sept. 2019, pp. 377–388

Illustrations



Formes homogènes avec $\lambda = 200$

Illustrations



Formes homogènes avec $\lambda = 500$

Illustrations



Formes homogènes avec $\lambda = 1000$

Illustrations



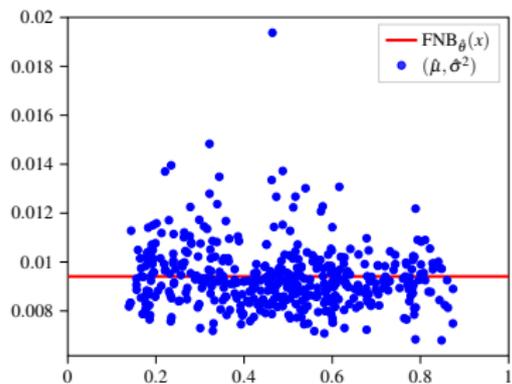
Formes homogènes avec $\lambda = 2000$

Illustrations



Formes homogènes avec $\lambda = 5000$

Illustrations



Comparaison des méthodes

Erreur moyenne relative (EMR)

$$\text{ERM}(\widehat{a, b, c}) = \frac{1}{|I|} \sum_{x_i \in I} \frac{|\text{FNB}_{(a,b,c)}(x_i) - \text{FNB}_{(\widehat{a,b,c})}(x_i)|}{\text{FNB}_{(a,b,c)}(x_i)}$$

avec

- $\text{FNB}_{(a,b,c)}$: la FNB de référence.
- $\text{FNB}_{(\widehat{a,b,c})}$: la FNB estimée.
- I : une discrétisation des valeurs de l'image.



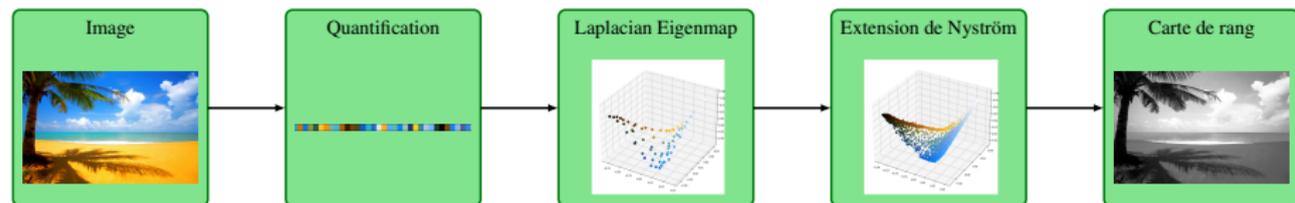
	Par blocs	Par AdF
<i>coquillage</i>	0.1212 (0.0743)	0.0385 (0.0124)
<i>immeuble</i>	0.0481 (0.0234)	0.0349 (0.0134)
<i>monument</i>	0.2235 (0.0966)	0.0552 (0.0201)
<i>mur</i>	0.1075 (0.1064)	0.0513 (0.0102)
<i>pavé</i>	0.8701 (0.7031)	0.0346 (0.0121)
<i>ville</i>	0.0926 (0.1007)	0.0462 (0.0116)

Problématique de l'adaptation aux images couleurs

- Images couleurs = images multivariées.
- **Problèmes** : pas de relation d'ordre naturelle pour les valeurs multivariées.
 - ▶ Le calcul du τ de Kendall n'est plus possible (dépend du rang des valeurs).
 - ▶ Problème bien connu en Morphologie Mathématique (Arbre des formes).
- Comment modéliser la fonction de niveau de bruit pour des images couleurs ?

Solutions

- L'arbre des formes est étendu aux image multivariée¹¹.
- Calcul d'un ordre total en utilisant l'apprentissage de treillis complet¹² pour calculer le τ de Kendall.



Étapes de l'apprentissage de treillis complet

- Modélisation de la fonction de niveau de bruit multivariée (FNBM) comme un triplet :

$$\text{FNB}(x) = (\text{FNB}_r(x_r), \text{FNB}_g(x_g), \text{FNB}_b(x_b))$$

¹¹ Edwin Carlinet and Thierry Géraud. "MToS: A Tree of Shapes for Multivariate Images". In: *IEEE Transactions on Image Processing* 24.12 (Dec. 2015), pp. 5330–5342

¹² Olivier Lézoray. "Complete Lattice Learning for Multivariate Mathematical Morphology". In: *Journal of Visual Communication and Image Representation* 35 (2016), pp. 220–235

Limitations

- L'arbre des formes multivarié perd de l'information durant la construction.



- Cette perte impacte la précision de l'estimation.
- Piste actuelle : changement de hiérarchie (hiérarchie de connexité contrainte¹³).

¹³ P. Soille. "Constrained connectivity for hierarchical image partitioning and simplification". In: *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 30.7 (2008), pp. 1132–1145

- Travail toujours en cours.
- On cherche à être le plus précis possible dans notre segmentation.
- Le bruit corrompt l'image et perturbe ce procédé.

Questions ?

- Questions ?